Digitized by the Internet Archive
in 2015

https://archive.org/details/kursvyssheiinizs028800

№74

КУРСЪ

ВЫСШЕЙ И НИЗШЕЙ

ГЕОДЕЗІИ.

А. БОЛОТОВА,

Полковника Генеральнаго Штаба, Члена Военно-Ученаго Комитета и Профессора Императорской Военной Академіи.

ЧАСТЬ II.

Ст.-Петербургъ.

Печатано въ типографіи К. Вингебера.

1849.

Печатано по Высочайшему повелѣнію.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Первая часть моего Курса Геодезіи вышла въ свѣтъ въ 1845 году; вторая часть является на судъ публики нынѣ въ 1849, и при томъ не вполнѣ, но лишь половина ея, заключающая въ себѣ окончаніе Высшей Геодезіи. Почитаю необходимымъ объяснить причину этого замедленія.

Въ первой части помѣщены три отдѣленія Высшей Геодезіи, а именно: объ инструментахъ, о дѣйствіяхъ геодезическихъ и о дѣйствіяхъ астрономическихъ. Вторая часть должна была заключать въ себѣ послѣднія два отдѣленія Высшей Геодезіи: о рѣшеніи вопросовъ Высшей Геодезіи и о проэкціяхъ картъ, и всю Низшую Геодезію. Хотя почти вся она была изготовлена мною къ печати еще до выхода въ свѣтъ первой части, однако, по возвращеніи моемъ, въ исходѣ 1845-го года, изъ-за границы, — куда я былъ командированъ по Высочайшему повелѣнію для собранія свѣдѣній о новѣйшихъ улучшеніяхъ въ геодезическихъ и топографическихъ работахъ, — я убѣдился въ необходимости подвергнуть ее коренной передѣлкѣ. Меня побудили къ тому, съ одной стороны бесѣды о нынѣшнемъ состояніи науки съ первостепенными геометрами и геодезистами нашего времени, каковы: Гауссъ, Гансенъ, Шумахеръ, Баронъ Плана, Дюфуръ и проч., а съ другой, введеніе во многихъ иностранныхъ государствахъ новыхъ методъ производства съемки и нивеллированія, которыя отличаются большею точностію въ сравненіи со способами извѣстными у насъ въ Россіи.

Опасаясь, чтобы 2-я часть, по многочисленности пріобрѣтенныхъ мною новыхъ матеріаловъ, не имѣла слишкомъ обширнаго объема я призналъ удобнѣйшимъ раздѣлить ее на двѣ: во 2-й помѣстить окончаніе Высшей Геодезіи, а въ 3-й всю Низшую Геодезію.

Читатели найдутъ въ издаваемой нынѣ 2-й части, много такихъ статей, которыя доселѣ еще нигдѣ не появлялись въ печати, на прим. формулы Гаусса для рѣшенія весьма остроугольнаго сферич. треугольника (*); способъ Гансена опредѣленія точекъ по двумъ даннымъ; способъ вычисленія сферическихъ координатъ, сообщенный мнѣ Баварскаго Генеральнаго Штаба Капитаномъ Ворикуромъ; вычисленіе длины дуги меридіана по даннымъ координатамъ точекъ; вычисленіе полигоновъ (**) и общія формулы для построенія всѣхъ перспективныхъ проэкцій вообще. Въ особенности же обращаю вниманіе читателей моего курса на Прибавленіе къ Высшей Геодезіи, помѣщенное въ концѣ сей части, по слѣдующей причинѣ:

Въ 1825 году астрономъ Шумахеръ напечаталъ въ Astronomische Abhandlungen мемуаръ Гаусса, служащій рѣшеніемъ заданнаго Копенгагенскимъ ученымъ обществомъ вопроса: «*изобразить часть данной поверхности на другой такъ, чтобы сохранялось подобіе въ самыхъ малѣйшихъ частяхъ,*» а спустя 19 лѣтъ, т. е. въ 1844 году, Гауссъ издалъ другой мемуаръ отдѣльною брошюрою, подъ заглавіемъ: Untersuchungen über die Gegenstände der höhern Geodäsie. Въ первомъ изъ сихъ мемуаровъ, глубокомысленный

(*) Эти формулы предложены Гауссомъ безъ доказательствъ въ Untersuchungen über die Gegenstände der höhern Geodäsie.

(**) Эта статья была помѣщена мною въ № III Воен. Жур. 1848 года.

авторъ, рѣшивъ вопросъ проэктированія точекъ въ самомъ общемъ видѣ, вывелъ формулы, служащія для черченія новой проэкціи, которая во многихъ отношеніяхъ выгоднѣе проэкціи Бонна, а въ другомъ, примѣнивъ прежде выведенныя имъ общія формулы къ проэктированію точекъ и линій съ поверхности земли на поверхность шара даннаго радіуса, доставилъ средства не только вычислять широту и долготу точекъ съ точностію гораздо строжайшею, нежели по способу Лежандра, доселѣ употреблявшемуся повсюду, но и рѣшать большую часть вопросовъ Сфероидической Тригонометріи, бывшихъ камнемъ преткновенія для многихъ ученыхъ.

Не взирая на чрезвычайную важность обоихъ этихъ мемуаровъ, весьма немногіе изъ извѣстныхъ ученыхъ въ Европѣ обратили на нихъ вниманіе. Это, можетъ статься, произошло частію отъ того, что Astronomische Abhandlungen, напечатанныя въ небольшомъ числѣ экземпляровъ, не поступали въ продажу, частію же и отъ того, что оба мемуара, въ особенности первый, написаны авторомъ съ такою сжатостію, которая можетъ быть доступна лишь весьма сильнымъ въ Математикѣ.

Имѣя въ виду познакомить нашихъ соотечественниковъ съ услугою, оказанною Гауссомъ ученому міру, я изложилъ въ 1-й статьѣ Прибавленія къ Высшей Геодезіи всю его теорію съ приложеніемъ ея къ построенію картъ и къ вычисленію широтъ и долготъ точекъ тригонометрической сѣти. Самая теорія изложена мною почти въ томъ видѣ, въ какомъ она напечатана въ Astr. Abhandlungen; но приложеніе ея (отъ § 511 до § 524) значительно дополнено, а именно: a.) выводъ всѣхъ формулъ развитъ съ бо̀льшею подробностію нежели въ подлинникѣ; b.) уравненія, служащія для построенія Гауссовой про-

экціи, преобразованы и доставленъ имъ видъ болѣе удобный для вычисленія, и с.) объяснены значенія и способы опредѣленія постоянныхъ количествъ, входящихъ въ сіи формулы, и изложены правила черченія проэкціи. Обо всемъ этомъ Гауссъ не сказалъ ни слова.

Въ томъ же Прибавленіи помѣщена другая статья подъ заглавіемъ: *Приложеніе вычисленія вѣроятностей къ наблюденіямъ.* При составленіи ея, я имѣлъ цѣлію сдѣлать этотъ предметъ, также плодъ трудовъ геніяльнаго Гаусса, доступнымъ для большаго числа читателей. Матеріалами служили мнѣ частію статьи астронома Энке: über die Methode der kleinsten Quadraten (см. Berl. astron. Jahrbuch 1834 — 1836); частію же два ненапечатанные еще мемуара знаменитаго нашего академика Г. Дѣйствит. Стат. Совѣт. В. Я. Струве, почтившаго меня, по своей всегдашней ко мнѣ пріязни, дозволеніемъ воспользоваться его трудами. Сверхъ того я обязанъ признательностію Г. Профессору А. Н. Савичу за доставленіе мнѣ манускрипта своего сочиненія о томъ же предметѣ, и за содѣйствіе мнѣ своими полезными совѣтами при составленіи сей трудной статьи.

А. Б.

ОГЛАВЛЕНІЕ II ЧАСТИ.

ОТДѢЛЕНІЕ IV.

Рѣшеніе вопросовъ Высшей Геодезіи.

стр.

Глава I. *Опредѣленіе географическаго положенія точекъ тригонометрической сѣти* 1

Общія понятія § 384. А) *Способъ Лежандра.* Выводъ формулы, выражающей разность широтъ двухъ точекъ, принимая землю за правильный шаръ § 385. Поправка сей формулы отъ сжатости земли § 386. Формула Пюиссана § 387. Вычисленіе разности долготъ § 388. Формулы для вычисленія азимутовъ § 390. Поправка этихъ формулъ отъ сжатости земли § 392. В.) *Формулы Гаусса,* для вычисленія весьма остроугольнаго сферическаго треугольника § 393.

Глава II. *О координатахъ* 22

Перпендикуляръ къ меридіану § 396. Различныя системы координатъ § 397. А) *Способъ Кассини* § 398. Вычисленіе дирекціональныхъ угловъ § 400. Примѣръ § 401. Опредѣленіе точки по тремъ даннымъ § 403. Способъ Гансена для опредѣленія точки по двумъ даннымъ § 404. Практическія замѣчанія § 405. В) *Сферическія координаты.* Вычисленіе оныхъ по способу принятому въ Баваріи § 406. Способъ Лежандра § 408. Вычисленіе координатъ второкласныхъ точекъ § 409. С.) *Система координатъ Генерала Шуберта* § 410. D. *Полярныя координаты* § 411. Вычисленіе прямоугольныхъ сферическихъ координатъ по даннымъ полярнымъ § 413.

Глава III. *О вычисленіи широты и долготы точекъ сѣти посредствомъ координатъ* 52

Выводъ формулъ § 414. Выраженіе амплитуды эллиптической дуги по данной ея длинѣ § 416. Примѣръ § 416. Вычисленіе координатъ точки по данной ея широтѣ и долготѣ § 418.

стр.

Глава IV. *О геодезической линіи*........................... 62

Опредѣленіе кратчайшаго разстоянія между двумя данными точками по даннымъ широтамъ оныхъ и азимуту линіи § 420. Рѣшеніе того же вопроса когда вмѣсто азимута линіи, дана разность долготъ § 421. Формулы Бесселя, выражающія свойство геодезической линіи § 423. Примѣненіе сихъ формулъ для вычисленія широты и долготы точекъ треангуляціи § 424 и 425.

Глава V. *Объ измѣреніи дугъ меридіановъ и параллелей*..... 79

Вычисленіе дуги меридіана между двумя параллелями проходящими чрезъ двѣ точки сѣти по даннымъ координатамъ сихъ точекъ § 428. Рѣшеніе того же вопроса, когда координаты не были вычислены § 429. Измѣреніе дугъ параллелей § 430. Вычисленіе нормалей точекъ сѣти. § 431. Вычисленіе сжатости земнаго сфероида по двумъ измѣреннымъ дугамъ меридіана и параллели § 432. Примѣръ, заимствованный изъ французскаго и италіанскаго градусныхъ измѣреній § 433.

Глава VI. *О контролѣ и исправленіи результатовъ дѣйствій геодезическихъ*....................................... 94

Повѣрительные базисы § 435. Исправленіе угловъ и боковъ треангуляціи по оказавшейся разности между вычисленною и измѣренною длиною базиса § 437. Вычисленіе полигоновъ § 439. Исправленіе географическаго положенія точекъ по оказавшейся разности между вычисленною и наблюденною широтою точки § 440. Исправленіе широтъ и долготъ точекъ сѣти, когда для сжатости взята будетъ иная величина нежели та, которая вводилась прежде въ вычисленіе § 442. Опредѣленіе сжатости и длины полуосей эллипсоида вращенія, наиболѣе соприкасающагося къ странѣ покрытой сѣтью § 443. Дифференціальныя формулы служащія для исправленія вычисленныхъ широтъ, долготъ и азимутовъ, когда широта начальной точки и азимутъ прилежащаго къ ней бока, оказались ошибочными § 444.

ОТДѢЛЕНІЕ V.

Проэкціи картъ.

Глава I. *Предварительныя понятія*.................. 116

А.) *Различные роды картъ* § 447. В.) *Масштабъ;* опредѣленіе линейнаго масштаба по данному уменьшенію карты

стр.

§ 448. Рѣшеніе обратнаго вопроса § 449. Построеніе поперечнаго масштаба § 450. C.) *Составленіе картъ.* Общія понятія § 454.

Глава II. *О перспективныхъ проэкціяхъ*.................... 124

Общія понятія о перспективныхъ проэкціяхъ § 456. A.) *Стереографическая проэкція* § 457. Каждый кругъ на поверхности шара представляется на проэкціи тоже въ видѣ круга § 458. Сфер. уголъ на шарѣ равняется своей проэкціи § 457. Построенія: экваторіальной § 460, полярной § 461 и горизонтальной проэкціи § 462. Формулы, выражающія длину радіусовъ которыми описываются круги на проэкціи § 463. Легчайшій способъ для построенія экваторіальной проэкціи § 464. Замѣчанія, касательно стереографическихъ проэкцій § 465. B.) *Орѳографическая проэкція* § 466. C) *Центральная проэкція* § 467. D.) *Проэкція Лагира* § 468. E.) *Общія формулы для построенія перспективныхъ проэкцій вообще* § 469. Примѣненія оныхъ къ построенію проэкцій стереографической, орѳографической и центральной § 470.

Глава III. *Проэкціи Арровсмидта и Ламберта*............. 145

Проэкція Арровсмидта § 471. Формулы для ея построенія § 472. Проэкція Ламберта § 473.

Глава IV. *Коническія проэкціи*........................ 150

Общія понятія § 475. Построеніе проэкціи, принимаемая развертываемую поверхность конуса касательною къ шару § 477. Вычисленіе координатъ для построенія сей проэкціи § 480. Построеніе проэкціи, предполагая конусъ пересѣкающимъ шаръ по направленію двухъ параллелей § 481. Проэкція Делиля § 482. Приближенный способъ черченія оной § 483.

Глава V. *Проэкціи Флемстида и Бонна*.................... 156

Проэкція Флемстида § 484. Сравненіе проэкціи Бонна § 487. Вычисленіе длины координатъ точки по даннымъ ея широтѣ и долготѣ § 488. Построеніе проэкціи § 489. Нанесеніе точекъ тригон. сѣти на листы начерченной проэкціи § 490. Аналитическое изслѣдованіе свойствъ проэкціи Бонна § 491. Опредѣленіе на сколько дуги меридіановъ представляются на проэкціи ошибочными § 493. Тоже въ разсужденіи угловъ § 494 и геодезическихъ линій вообще § 495. Способъ Ганри для нанесенія точекъ сѣти

стр.

на листы начерченной проэкціи § 496. Неизмѣняемость величины площадей на проэкціи Бонна § 497.

Глава VI. *Проэкція Меркатора*.......................... 178

Локсодромическая линія § 498. Построеніе частныхъ морскихъ картъ § 499. Проэкція Меркатора § 500. Вычисленіе возрастающихъ широтъ § 502. Употребленіе таблицы § 503. Изслѣдованіе свойствъ проэкціи Меркатора § 504. Рѣшеніе главныхъ вопросовъ, встрѣчающихся при мореплаваніи § 505. Опредѣленіе частныхъ масштабовъ начерченной проэкціи § 506.

ПРИБАВЛЕНІЕ КЪ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗІИ.

I. *Общая теорія проэкцій Гаусса*.......... 190

Рѣшеніе вопроса: *изобразить часть данной поверхности на другой такъ, чтобы сохранялось подобіе въ самыхъ малѣйшихъ частяхъ* § 507. Выраженіе длины безконечно малой линіи лежащей на криволинейной поверхности § 508. Интегрированіе этого выраженія § 509. Приложеніе этой теоріи къ изображенію на плоскости поверхности земли, разсматриваемой за эллипсоидъ вращенія § 511. Выводъ формулъ, выражающихъ координаты точки на проэкціи § 512. Изслѣдованіе свойствъ этихъ формулъ § 512. Опредѣленіе содержанія между какою либо малою дугою лежащею на поверхности земли и соотвѣтствующею ей дугою на проэкціи § 514. Вычисленіе и построеніе частныхъ масштабовъ проэкціи и опредѣленіе постоянныхъ входящихъ въ формулы Гаусса, сообразно предварительно принятымъ условіямъ § 515. Нанесеніе точекъ на построенную проэкцію § 516. Сравненіе проэкціи Гаусса съ проэкціею Бонна § 517. Проэктированіе на поверхность шара точекъ лежащихъ на поверхности земли § 518. Опредѣленіе постояныхъ количествъ, входящихъ въ сіи формулы § 519. Опредѣленіе на шарѣ широты и долготы точки по данной широтѣ и долготѣ точки на эллипсоидѣ § 520. Рѣшеніе обратнаго вопроса § 521. Примѣненіе этихъ формулъ къ вычисленію географическаго положенія точекъ тригоном. сѣти § 523. Опредѣленіе на шарѣ длины проэкціи геодезической линіи и азимута дуги большаго круга соединяющаго оконечности оной § 524. Примѣръ § 526.

стр.

II. *Приложенiе вычисленiя вѣроятностей къ наблюденiямъ.* 236
Погрѣшности правильныя или постоянныя и погрѣшности случайныя § 528. Предѣлы случайныхъ погрѣшностей § 529. Кривая вѣроятностей § 530. Вѣроятность погрѣшности, заключающейся между весьма близкими между собою предѣлами § 531. Выводъ формулы выражающей сiю вѣроятность § 532. Вѣроятнѣйшая погрѣшность § 533. Мѣра точности § 534. Выраженiе вѣроятности погрѣшности въ ряду наблюденiй въ коемъ вѣроятнѣйшая погрѣшность равна 1. Опредѣленiе средней и вѣроятнѣйшей погрѣшности посредствомъ дѣйствительныхъ погрѣшностей § 536. Опредѣленiе вѣроятнѣйшей погрѣшности какой либо величины, зависящей отъ многихъ другихъ найденныхъ изъ наблюденiй § 537. Опредѣленiе вѣроят. погрѣшности какого либо ряда наблюденiй § 538. Вѣсъ опредѣленiя. § 539. Содержанiе вѣсовъ § 540. Опредѣленiе вѣроятнѣйшей величины изъ многихъ наблюденiй § 541. Способъ наименьшихъ квадратовъ § 542. Случай когда величины, входящiя въ условныя уравненiя опредѣлены были съ различною точностiю § 543. Рѣшенiе нормальныхъ уравненiй § 544. Опредѣленiе мѣры точности величинъ, найденныхъ посредствомъ способа наименьшихъ квадратовъ § 545, также среднихъ и вѣроятнѣйшихъ погрѣшностей оныхъ § 546.

Рѣшенiе нѣкоторыхъ вопросовъ Высшей Геодезiи, посредствомъ способа наименьшихъ квадратовъ.............. 279
I) Исправленiе угловъ § 548. II) Опредѣленiе точки по многимъ даннымъ § 549. III) Вычисленiе тригонометрической сѣти § 550.

Изъясненiе таблицъ............................ 298

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

стран.	*строк.*		*напечатано:*	*читай:*
40	7	сверху	Для главной	1-е) Для главной
47	21	»	$\text{tang}\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma'-\frac{1}{3}\varepsilon')$	$\cot\frac{1}{2}(\alpha'-\gamma'-\frac{1}{3}\varepsilon')$
134	10	»	ϱ	ϱ'
170	4	»	35°	55°
181	3	снизу	$nq=\alpha$	$mn=\alpha$
»	2	«	уг. q	уг. n
182	1	сверху	$mq=\alpha\cos z, nm=mq\,\text{tg}\,z$	$nq=\alpha\cos z, qm=nq\,\text{tg}\,z$
«	5	»	mq	nq
»	11,12,13	»	nm	mq
»	14	»	$nm=mq\,\text{tang}\,z$	$qm=nq\,\text{tang}\,z$
»	15	»	$\text{tang}\,z.mq$	$\text{tang}\,z.nq$
»	16,19,23	»	$\frac{mq}{\cos\lambda}$	$\frac{nq}{\cos\lambda}$
»	4	снизу	$\int\frac{mq}{\cos\lambda}, \int mq.\sec\lambda$	$\int\frac{nq}{\cos\lambda}, \int nq.\sec\lambda$
»	2	»	mq	nq

ОТДѢЛЕНІЕ IV.

РѢШЕНІЕ ВОПРОСОВЪ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗІИ.

—

ГЛАВА I.

Опредѣленіе географическаго положенія точекъ тригонометрической сѣти.

§ 384. Когда бока треугольниковъ тригонометрической сѣти вычислены, а географическая широта и долгота одной изъ ея точекъ, также какъ и азимутъ при сей точкѣ какого либо бока треугольника, съ строгою точностію найдены дѣйствіями астрономическими, тогда получаются всѣ данныя для опредѣленія географическаго положенія всѣхъ прочихъ точекъ треангуляціи. И дѣйствительно, предположимъ, что M, M', M''.... (чер. 204) суть точки сѣти, дуги MM', $M'M''$.... бока треугольниковъ ихъ соединяющіе, P полюсъ земли, которую на первый разъ примемъ за *правильный шаръ,* и PM, PM', PM''..... меридіаны, чрезъ сіи точки проходящіе: если географ. широта l точки M, и азимутъ $PMM' = z$ бока $MM' = a$ при M (считаемый отъ сѣвера къ востоку до 360°) извѣстны, то въ сфер. треугольникѣ PMM' по даннымъ тремъ частямъ, именно: $PM = 90° - l$, $MM' = a$ и уг. $PMM' = z$, можемъ посредствомъ формулъ сферич. Тригонометріи, найдти остальныя три части, т. е. дугу PM', выража-

ющую дополненіе до 90° широты l' точки M', уг. MPM', который есть разность долготъ точекъ M и M', и наконецъ уг. $MM'P$, или дополненіе до 360° азимута бока MM' на горизонтѣ M'. Послѣ чего приступятъ къ рѣшенію слѣдующаго треуг-ка $PM'M''$ по даннымъ бокамъ $PM'=90°-l$, $M'M''=a'$ и азимуту линіи $M'M''$ при M', величина коего получится, если изъ азимута предшествующаго бока MM', вычтемъ уг. $MM'M''$ сими линіями составляемый, или приложимъ къ оному, смотря потому лежитъ ли уголъ $MM'M''$ отъ линіи MM', по ту или другую сторону. И такъ, зная въ треуг-кѣ $PM'M''$ три части, вычисленіе дастъ три остальныя, т. е. географическую широту l'' точки M'', долготу ея отъ меридіана PM', и азимутъ бока $M'M''$ на горизонтѣ точки M''. Такимъ же образомъ поступятъ далѣе.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что опредѣленіе географическаго положенія точекъ сѣти, заключается вообще въ рѣшеніи вопроса: *по даннымъ тремъ частямъ сфер. треуг-ка* PMM', (которыя суть два бока $MM'=a$, $PM=90°-l$ и заключающійся между ними уголъ $PMM'=z$), найдти остальныя его три части, т. е. бокъ $PM'=90°-l'$ и углы $MPM'=P$ и $MM'P=360°-z'$. Размотримъ какимъ образомъ опредѣляются каждая изъ сихъ частей. Здѣсь предлагаемъ два способа: одинъ — Лежандра, а другой — Гаусса.

A.) СПОСОБЪ ЛЕЖАНДРА.

§ 385. *Вычисленіе географической широты.* Не обращая вниманія на сжатіе земли подъ полюсами, и потому принимая треуг. PMM' за сферическій, примѣнимъ къ нему основное урав. сфер. Тригонометріи (см. *введеніе* форм. 32), и получимъ

$$\sin l' = \sin l . \cos a + \cos l . \sin a . \cos z$$

Такъ какъ дуга a по условію весьма мала, то можно $\cos a$ и $\sin a$ выразить рядами и ограничиваться членами 3-го порядка. И такъ, подставя $1-\frac{1}{2}a^2$ и $a-\frac{1}{6}a^3$ вмѣсто $\cos a$ и $\sin a$ и расположивъ члены по возрастающимъ степенямъ

дуги a, выраженной въ частяхъ радіуса принятаго за единицу, получимъ

$$\sin l' - \sin l = a \cos l \cos z - \tfrac{1}{2} a^2 \sin l - \tfrac{1}{6} a^3 \cos l . \cos z;$$

но
$$\sin l' - \sin l = 2 \sin \tfrac{1}{2} (l' - l) \cos \tfrac{1}{2} (l' + l),$$

или если положимъ $l' - l = d$, то $l' + l = 2l + d$; послѣ чего

$$\sin l' - \sin l = 2 \sin \tfrac{1}{2} d \cos (l + \tfrac{1}{2} d)$$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} d (\cos l . \cos \tfrac{1}{2} d - \sin l . \sin \tfrac{1}{2} d).$$

Внеся это выраженіе въ предшествующее урав. вмѣсто $\sin l' - \sin l$, и раздѣливъ потомъ все урав. на $2 \cos l \cos^2 \tfrac{1}{2} d$, найдемъ

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} d (1 - \operatorname{tang} l . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} d) = \frac{C}{\cos^2 \tfrac{1}{2} d} = C (1 + \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} d),$$

положивъ для сокращенія

$$C = \tfrac{1}{2} a \cos z - \tfrac{1}{4} a^2 \operatorname{tang} l - \tfrac{1}{12} a^3 \cos z.$$

Если расположимъ члены по восходящимъ степенямъ величины $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} d$, то будетъ

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} d - (\operatorname{tang} l + C) \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} d = C.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно $\tfrac{1}{2} d$ (*), откинувъ члены

(*) Для рѣшенія уравненія $\operatorname{tang} x + h \operatorname{tang}^2 x = C$, гдѣ C и x суть количества весьма малыя, можно поступить съ нимъ какъ съ уравненіемъ 2-й степени, и потомъ развернуть радикалъ въ рядъ по восходящимъ степенямъ C; но слѣдующій способъ будетъ удобнѣе, и легко можетъ быть примѣненъ къ другимъ вопросамъ. Представивъ $\operatorname{tang} x$ множителемъ, получимъ

$$\operatorname{tang} x = \frac{C}{1 + h . \operatorname{tang} x}.$$

Отбросимъ сначала членъ $h \operatorname{tang} x$, получимъ для 1-го приближенія $\operatorname{tang} x = C$; подставя сію величину въ знаменатель, получимъ для 2-го приближенія

$$\operatorname{tang} x = \frac{C}{1 + hC} = C (1 + h C)^{-1} = C (1 - h C)$$
$$\operatorname{tang} x = C - h C^2.$$

4-го порядка, и подставя вмѣсто C его величину, выражаемую предшествующимъ уравненіемъ, окончательно найдемъ

$$d = a\cos z - \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} l \sin^2 z - \tfrac{1}{6}a^3 \cos z \sin^2 z (1 + 3\operatorname{tg}^2 l).$$

Здѣсь d и a означаютъ длины дугъ, измѣряющихъ угловыя величины $l' - l$ и MM', выраженныя въ частяхъ радіуса принятаго за единицу. Дабы сіи дуги, входили выраженными въ секундахъ, надобно вмѣсто a и d подставить $a\sin 1''$ и $d\sin 1''$, отъ чего это урав. обратится въ

$$d = a\cos z - \tfrac{1}{2}a^2 \sin 1'' \operatorname{tg} l \sin^2 z - \tfrac{1}{6}a^3 \sin^2 1'' \cos z \sin^2 z (1 + 3\operatorname{tg}^2 l) \ldots (A)$$

гдѣ $$d = l' - l,\ l' = l + d.$$

§ 386. До сего времени мы разсматривали землю сферическою. Введемъ условіе, что она имѣетъ видъ эллипсоида вращенія. Положимъ, что MN = N (чер. 203) есть нормаль точки M, а M'N' = N' точки M'; зениты Z и Z' обѣихъ точекъ будутъ находиться на продолженіи этихъ нормалей.

Вообразимъ себѣ сферу, которой центръ находится въ точкѣ N, а радіусъ есть MN: она будетъ пересѣкать поверхность земнаго сфероида по направленію дуги MF земной параллели проходящей чрезъ M, ибо всѣ точки сей дуги находятся въ равномъ разстояніи отъ точки N. Проведя прямую

Подставя сію величину опять въ знаменатель, онъ обратится въ $1 + hC - h^2C^2$, а возвысивъ въ степень -1, которая будетъ $1 - hC + 2h^2C^2$, получимъ для 3-го приближенія

$$\operatorname{tang} x = C - hC^2 + 2h^2C^3;$$

Такимъ же образомъ найдемъ

$$\operatorname{tang} x = C - hC^2 + 2h^2C^3 - 5h^3C^4, \text{ и т. д.}$$

Но какъ извѣстно (см. введ. урав. 22), что

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x,$$

то внеся сюда вмѣсто $\operatorname{tang} x$, его величину, выраженную выше предложеннымъ рядомъ, получимъ слѣдующее урав. имѣющее точность до 5-го порядка:

$$x = C - hC^2 + (2h^2 - \tfrac{1}{3})C^3 + (1 - 5h^2)hC^4 + \text{и проч.}$$

Дабы примѣнить сей рядъ къ рѣшенію уравненія помѣщеннаго въ текстѣ, надлежитъ положить

$$h = -(\operatorname{tang} l + C),\ x = \tfrac{1}{2}d.$$

NM′ и продоливъ плоскости меридіановъ NMP, NPM′, точекъ M и M′, также какъ и плоскость M′NM до пересѣченія съ поверхностію сей сферы, произойдетъ сферич. треуг. Mpm, въ которомъ бокъ $pM = 90^\circ - l$, (ибо онъ измѣряется угломъ pNM), а уг. pMm равняется углу PMM′, т. е. данному азимуту z бока MM′; длину же дуги Mm безъ чувствительной погрѣшности можно принимать равною боку MM′ триг. сѣти, и потому число секундъ сей дуги Mm, или что все равно угла MNm будетъ $= \frac{K}{N \sin 1''}$ (см. § 171); означая чрезъ K длину бока MM′ выраженную въ линейной мѣрѣ.

И такъ, если во всѣхъ вышепредложенныхъ формулахъ, подъ величиною a станемъ подразумѣвать не число секундъ дуги MM′, но число секундъ дуги Mm, которое получится, коль скоро длину бока K тригонометрической сѣти, раздѣлимъ на $N \sin 1''$, $a = \frac{K}{N \sin 1''}$ то онѣ будутъ приличествовать треуг-ку pMm, и потому входящая въ нихъ величина $l' = l + d$ выразитъ дополненіе до 90° дуги pm, $l' = 90^\circ - pm$, а величина d опредѣляемая формулою (A), угловую величину дуги mF, ибо по условію $p\text{F} = p\text{M}$. Впредь будемъ называть сію широту l' ***неисправленною широтою*** точки M′.

Но искомая широта точки M′ есть дополненіе угла pN′M′ до 90°: означимъ сію широту чрезъ L, а разность широтъ L и l точекъ M′ и M чрезъ D. Эта разность D широтъ очевидно выражаетъ угловую величину дуги M′F, $L = l + D$. Для опредѣленія D, замѣтимъ, что длины дугъ mF и M′F безъ чувствительной погрѣшности могутъ быть принимаемы равными между собою, между тѣмъ, какъ амплитуды ихъ различны, ибо дуга mF описана нормалью MN = N, а радіусъ эллиптической дуги M′F есть радіусъ кривизны ϱ меридіана при точкѣ находящейся на срединѣ ея. Но на основаніи изложеннаго въ § 173 извѣстно, что длина дуги $m\text{F} = N d \sin 1''$, а дуги $\text{M}'\text{F} = \varrho \text{D} \sin 1''$; по равенству же сихъ дугъ, будетъ $Nd = \varrho D$, откуда

$$D = \frac{N}{\varrho} d,$$

не забывая, что N есть нормаль подъ широтою l, а ϱ радіусъ кривизны меридіана подъ широтою $\frac{1}{2}(l+l')$. Если въ этомъ выраженіи примемъ ϱ за радіусъ кривизны подъ широтою l, (что не произведетъ значительной погрѣшности), т. е.

$$N = \frac{A}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)}}, \quad \varrho = \frac{A(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}} \text{ то получимъ}$$

$$D = \frac{N}{\varrho}d = d\,\frac{1-e^2\sin^2 l}{1-e^2} = d(1+e^2\cos^2 l) \text{ или } = d + de^2\cos^2 l,$$

при чемъ $de^2\cos^2 l$ очевидно выражаетъ поправку отъ сфероидальности земли, въ найденной широтѣ l', опредѣляемой формулою (A). (*)

Отсюда заключаемъ, что для опредѣленія разности широтъ двухъ точекъ, принимая во вниманіе сфероидальность земли, должно помножить 2-ю часть урав. (A) на отношеніе $\frac{N}{\varrho}$, или на двучленъ $(1+e^2\cos^2 l)$. Вводя 1-й изъ сихъ двухъ множителей и подставя $\frac{K}{N\sin 1''}$ вмѣсто a, получимъ

(*) Должно замѣтить, что въ плоскомъ треуг-кѣ M'N'N, уг. NM'N', который означимъ чрезъ i, будетъ $i = p\text{NM}' - p\text{N}'\text{M}'$; по $p\text{NM}' = 90° - l'$ $p\text{N}'\text{M}' = 90° - \text{L}$, а посему $i = \text{L} - l' = \text{L} - l - d = \text{D} - d$, откуда $\text{D} = d + i$, изъ чего заключаемъ, что этотъ уг. i равняется величинѣ выведенной нами выше поправки $de^2\cos^2 l$. Впрочемъ величину этой поправки должно разсматривать какъ приближенную, ибо она выведена изъ того предположенія, что въ $\frac{N}{\varrho}$, радіусъ кривизны ϱ находится подъ широтою l, а не подъ широтою $\frac{1}{2}(l+l')$. Для опредѣленія истинной ея величины развернемъ въ рядъ это отношеніе. Для сего возьмемъ сперва рядъ выражающій длину нормали N, а именно (см. § 171)

$$N = \frac{A}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{1}{2}}} = A\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 l + \tfrac{3}{8}e^4\sin^4 l + \ldots\right)$$

а потомъ, положивъ $\frac{1}{2}(l+l') = l + \frac{1}{2}d = \xi$, выразимъ рядомъ величину $\frac{1}{\varrho}$ и будетъ

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{(1-e^2\sin^2\xi)^{\frac{3}{2}}}{A(1-e^2)} = \frac{1}{A}\left(1 + e^2\cos^2\xi + e^4 - \tfrac{3}{2}e^2\sin^2\xi - \tfrac{3}{2}e^4\sin^2\xi + \tfrac{3}{8}e^4\sin^2\xi\right)$$

$$D = \frac{K\cos z}{\varrho\sin 1''} - \tfrac{1}{2}\frac{K^2\,\mathrm{tg}\,l.\sin^2 z}{N\varrho\sin 1''} - \tfrac{1}{6}\frac{K^3\cos z\sin^2 z}{N^2\varrho\sin 1''}(1+3\,\mathrm{tg}^2 l)\,.\,.\,(A')$$

Если же вмѣсто $\frac{N}{\varrho}$ введемъ множителя $1+e^2\cos^2 l$, то будетъ

$$D = \left[\frac{K\cos z}{N\sin 1''} - \tfrac{1}{2}\frac{K^2\,\mathrm{tg}\,l\sin^2 z}{N^2\sin 1''} - \tfrac{1}{6}\frac{K^3\cos z\sin^2 z}{N^3\sin 1''}(1+3\,\mathrm{tg}^2 l)\right](1+e^2\cos^2 l)\ldots\ldots(A'')$$

или $D = [a\cos z - \tfrac{1}{2}a^2\sin 1''\,\mathrm{tg}\,l\sin^2 z$

$$-\tfrac{1}{6}a^3\sin^2 1''\cos z\sin^2 z\,(1+3\,\mathrm{tg}^2 l)]\,(1+e^2\cos^2 l)\ldots\ldots(A''')$$

не забывая, что $a = \frac{K}{N\sin 1''}$, $D = L - l$, $L = l + D$.

Первая изъ сихъ трехъ формулъ, предложенная Пюиссаномъ, замѣчательна по своей точности и по важнымъ своимъ приложеніямъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ, какъ это увидимъ въ послѣдствіи; обѣ же другія, хотя и менѣе точ-

---

Умноживъ сіи оба ряда одинъ на другой, перемѣнивъ синусы на косинусы и по причинѣ что $\sin^2\xi = \sin^2 l + d\sin 1''\sin l\cos l$, послѣ всѣхъ преобразованій и сокращеній, получимъ

$$\frac{N}{\varrho} = 1 + e^2\cos^2 l + e^4\cos^2 l - \tfrac{3}{2}e^2 d\sin 1''\sin l\cos l,$$

и какъ приближенная величина d есть $a\cos z$ или $\frac{K\cos z}{N\sin 1''}$, то

$$\frac{N}{\varrho} = 1 + e^2\cos^2 l + e^4\cos^2 l - \tfrac{3}{2}e^2\frac{K}{N}.\cos z\sin l\cos l\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Отсюда видимъ, что введеніе $1+e^2\cos^2 l$ вмѣсто $\frac{N}{\varrho}$, какъ предложено выше, ошибочно на величину послѣднихъ двухъ членовъ. Погрѣшность отъ того происходящая, при одномъ и томъ же K и l измѣняется вмѣстѣ съ азимутомъ z; она будетъ менѣе 3-го члена $e^4\cos^2 l$ при $z < 90°$ и $> 270°$, и напротивъ будетъ болѣе онаго при $z > 90°$ и $< 270°$, (ибо знакъ предъ $\cos z$ въ послѣднемъ случаѣ измѣняется). Принимая это во вниманіе, должно принять въ дѣйствіяхъ требующихъ строгой точности за постоянное правило, чтобы d умножать не на $1+e^2\cos^2 l$, какъ предложено было Лежандромъ, но на выведенное Пюиссаномъ выраженіе (a), или проще на $\frac{N}{\varrho}$, гдѣ ϱ должно брать подъ широтою $l+\tfrac{1}{2}d$.

ныя, употреблялись какъ во Франціи, такъ и во многихъ другихъ государствахъ для опредѣленія разности широтъ точекъ треангуляціи.

Для примѣра найдемъ величину D по формулѣ (A′) принимая за данныя $l = 56^\circ\, 28'\, 29'', 81$, $z = 140^\circ\, 30'\, 51'', 79$, K = 14680,85 саж. log K = 4.1667514. Для сего предварительно вычисляемъ N для широты l, по урав. $\sin\psi = e \sin l$, $N = \frac{\cos\psi}{A}$ (см. § 172); потомъ приближенную величину

$d = \frac{K \cos z}{N \sin 1''}$; послѣ чего $\frac{1}{2}(l + l')$ будетъ $l + \frac{1}{2}d$ и для сей

широты найдя ϱ или что еще проще доп. log $(\varrho \sin 1'')$ по форм. $\sin\psi' = e \sin(l + \frac{1}{2}d)$, $\log\varrho = \bar{2}.8417950 + 3 \log\cos\psi'$ (см. Ч. I стр. 330) (*) вычисляемъ D изъ урав. (A′). Ходъ вычисленія будетъ слѣдующій:

Вычисленіе N, $\frac{1}{2}(l + l')$ и доп. $\log(\varrho \sin 1'')$

$e \ldots \bar{2}.9122052$	$K \ldots 4.16675$	$e \ldots \bar{2}.9122052$
$\sin l \ldots 9.9209808$	$\cos z \ldots 9.88749$ —	$\sin \xi \ldots 9.9204360$
$\sin \psi \ldots 8.8331860$	доп. $(N \sin 1'') \ldots \bar{2}.83788$	$\sin \psi' \ldots 8.8326412$
$\psi = 3^\circ\, 54'\, 18'',8$	$d \ldots 2.89212$ —	$\psi' = 3^\circ\, 54'\, 1'',1$
$A \ldots 6.4755385$	$d = -780''$	$\cos^3 \psi' \ldots 9.9969790$
$\cos \psi \ldots 9.9989905$	$\frac{1}{2}d = -0^\circ\, 6'\, 30'',0$	постоян$\ldots \bar{2}.8417950$
$N \ldots 6.4765480$	$l = 56.28.29,81$	доп. $\varrho \sin 1'' \ldots \bar{2}.8387740$
$\sin 1'' \ldots 4.6855749$	$\frac{1}{2}(l + l') = 56.21.59,8 = \xi$	доп. $N \ldots \bar{7}.52345$
$N \sin 1'' \ldots 1.1621229$		доп $(N \varrho \sin 1'') \ldots \bar{8}.36222$

(*) При производствѣ обширныхъ геодезическихъ дѣйствій, для упрощенія вычисленій, полезно предварительно составить таблицу логариѳмовъ нормалей отъ 15′ до 15′ или даже отъ 5′ до 5′ широты для всего пространства занимаемаго триг. сѣтью. Имѣя подобнаго рода таблицу во все нѣтъ надобности вычислять ϱ какъ сказано выше, но удобнѣе взять логариѳмъ формулы (11) въ § 168, а именно:

$$\varrho = N^3 . \frac{(1 - e^2)}{A^2},$$

и будетъ $\log\varrho = 3 \log N + \overline{13}.0460146$

подставляя вмѣсто A и e величины предложенныя въ § 189.

Вычисленіе урав. (A′)

K....4.1667514
cos *z*....9.8874958—
доп(ρ sin 1″).$\bar{2}$.8387740
$\bar{2}$.8930212—....1-й чл. = —781″,666
$\frac{1}{6}$....$\bar{1}$.22185 —
K²....8.33350
sin² *z*....9.60676 2-й чл. = — 1,514
доп.(N²).$\overline{13}$.04690
$\bar{3}$.10203+......3-й чл. = + 0,001
3....0.47712
tg² *l*....0.35760
$\bar{3}$.93675+......4-й чл. = + 0,009
D = — 783,170

0,5....$\bar{1}$.69897—
K²....8.33397
tang *l*....0.17880
sin² *z*....9.60676
доп.(Nρ sin 1″)....$\bar{8}$.36223
2-й чл....0.18016—

l = 56° 28′ 29″,810
= —0.13. 3,170
L = 56.15.26,640

§ 387. По многосложности вычисленія разности D широть точекъ триг. сѣти по вышепредложеннымъ формуламъ, Пюиссанъ предложилъ слѣдующій простѣйшій способъ:

Возьмемъ урав. (A′), и напишемъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$D = \frac{K\cos z}{\varrho\sin 1''} - \frac{1}{2}\,\frac{K^2\sin^2 z}{N\,\varrho\sin 1''}\left[\operatorname{tang} l + \frac{K\cos z}{N}\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{tg}^2 l\right)\right] \ldots\ldots (a)$$

Но если возьмемъ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(l+l')$ или $\operatorname{tg}(l+\frac{1}{2}d)$ и развернемъ, то

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(l+l') = \frac{\operatorname{tg} l + \frac{1}{2}d\sin 1''}{1 - \frac{1}{2}d\sin 1''\operatorname{tg} l} = (\operatorname{tg} l + \tfrac{1}{2}d\sin 1'')\,(1 - \tfrac{1}{2}d\sin 1''\operatorname{tg} l)^{-1}$$

Внеся вмѣсто *d* его приближенную величину $\frac{K\cos z}{N\sin 1''}$ и отбрасывая члены 3-го порядка, получимъ

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(l+l') = \operatorname{tang} l + \tfrac{1}{2}\,\frac{K\cos z}{N} + \tfrac{1}{2}\,\frac{K\cos z}{N}\operatorname{tang}^2 l$$

$$= \operatorname{tang} l + \frac{K\cos z}{N}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2 l\right]$$

Если же требуется найдти не log ρ, но log (ρ sin 1″), то получимъ

$$\log(\varrho\sin 1'') = 3\log N + \overline{14}.7315895.$$

Такъ какъ это выраженіе различествуетъ отъ послѣдняго члена урав. (a) величиною весьма незначительною, то вмѣсто урав. (a) безъ чувствительной погрѣшности можно принять

$$D = \frac{K \cos z}{\varrho \sin 1''} - \frac{1}{2}\frac{K^2 \sin^2 z}{N \varrho \sin 1''} \tang \tfrac{1}{2}(l + l') \ldots\ldots (A^{IV})$$

Такова формула Пюиссана, замѣчательная по своей малосложности. Она даже точнѣе нежели урав. (A''') повсюду употребляемое, ибо различествуетъ отъ урав. (A') только послѣднимъ своимъ членомъ, который есть 3-го порядка, между тѣмъ какъ множитель $1 + e^2 \cos^2 l$ будучи введенъ вмѣсто $\frac{N}{\varrho}$ (см. стр. 6) имѣетъ вліяніе на величину 1-го члена въ форм. (A) При употребленіи урав. (A^{IV}), надобно сперва вычислить $\log N$ для широты l, потомъ приближеную величину $d = \frac{K \cos z}{N \sin 1''}$; послѣ чего $\frac{1}{2}(l + l')$ будетъ $l + \frac{1}{2}d$, и для сей широты найдя ϱ, или что еще проще доп. $\log(\varrho \sin 1'')$, какъ объяснено было выше, приступить къ вычисленію урав. (A^{IV}). Такъ на прим. для данныхъ предложенныхъ на стр. 8 не повторяя вычисленія $\log N$, $\frac{1}{2}(l + l')$ и доп. $\log(\varrho \sin 1'')$, ходъ дѣйствія будетъ:

K....4.1667514	K....4.16675
cos z....9.8874958—	sin z....9.80338
доп. (ϱ sin 1'')....$\bar{2}$.8387740	K sin z....3.97013
1-й чл....2.8930212—	(K sin z)²....7.94026
1-й членъ = — 781'', 666	$\frac{1}{2}$....$\bar{1}$.69897—
2-й » = — 1, 508	tang $\frac{1}{2}(l+l')$....0.17702
D = — 783, 174	доп. (N ϱ sin 1'')....$\bar{8}$.36222
или = — 0° 13' 3'',174	2-й чл....0.17847—
l = 56.28.29,810	2-й членъ = —1'',508
L = 56.15.26,636	

§ 388. *Вычисленіе долготъ.* Предполагая какъ и прежде, что M и M' суть данныя точки тригон. сѣти (чер. 203) P полюсъ земли, и что нормалью MN=N изъ точки N описана сфера, въ треуг-кѣ Mmp (образуемымъ на ея поверхности сѣченіемъ плоскостей меридіановъ PM, PM' и плоскостію NMM'),

сфер. уг. Mpm очевидно будетъ равенъ искомой разности долготъ точекъ M и M′, т. е. углу $MPM' = P$. Изъ этого треуг-ка Mmp, въ коемъ извѣстны $Mp = 90° - l$, $Mm = a = \frac{K}{N \sin 1''}$, уг. $pMm = z$, и наконецъ бокъ $pm = 90° - l'$, гдѣ $l' = l + d$ есть *неисправленная широта* точки M′, опредѣляемая формулою (A) (см. стр. 4) по теоремѣ синусовъ получимъ

$$\cos l' : \sin z = \sin a : \sin P, \text{ откуда } \sin P = \frac{\sin a . \sin z}{\cos l'} \; \ldots\ldots \; (B).$$

Но какъ углы P и a весьма малы, то можно разложить синусы оныхъ по возрастающимъ степенямъ дугъ, выраженныхъ въ частяхъ радіуса принятаго за единицу, и будетъ

$$P - \tfrac{1}{6} P^3 \sin^2 1'' = \frac{\sin z}{\cos l'} \left(a - \tfrac{1}{6} a^3 \sin^2 1''\right).$$

Если отбросимъ члены 3-го порядка, то для 1-го приближенія получимъ

$$P = \frac{a \sin z}{\cos l'} \; \ldots\ldots\ldots \; (B')$$

возведя же это выраженіе въ 3-ю степень и внеся вмѣсто P^3 въ предшествующее урав., найдемъ

$$P = \frac{a \sin z}{\cos l'} \left(1 - \tfrac{1}{6} a^3 \sin^2 1'' + \tfrac{1}{6} \frac{a^2 \sin^2 1'' \sin^2 z}{\cos^2 l'}\right) \ldots\ldots\ldots \; (B'')$$

гдѣ $a = \frac{K}{N \sin 1''}$, выражаетъ число секундъ дуги Mm, а $l' = l + d$ неисправленную широту точки M′. Такимъ образомъ если разность широтъ вычисляется по формулѣ (A‴), то за разность широтъ примутъ ту, которая получится изъ сей формулы, прежде нежели введется въ нее множитель $1 + e^2 \cos^2 l$; если же разность широтъ вычисляется по формулѣ (A′) или (A^{IV}), дающей прямо истинную разность D широтъ, то изъ ней надобно сперва вычесть $D e^2 \cos^2 l$, (ибо $D = d\,(1 + e^2 \cos^2 l)$ откуда $d = D(1 + e^2 \cos^2 l)^{-1}$ или $= D\,(1 - e^2 \cos^2 l)$. Послѣ чего результатъ приложивъ къ l съ тѣмъ знакомъ какой при немъ находится, сумма выразитъ ту широту l', которую должно

вводить въ одну изъ вышепредложенныхъ формулъ (B), (B′) или (B″). Впрочемъ l' найдется еще проще, если изъ найденной истинной широты L вычтемъ $De^2\cos^2 l$, ибо $l' = l + d = l + D - De^2\cos^2 l = L - De^2\cos^2 l$.

§ 389. Чтобы не вычислять съ сею цѣлію величину d, исключимъ $\cos l'$ изъ урав. (B) или (B.′) Для сего подставимъ вмѣсто $\cos l'$ его величину

$$\cos(l+d) = \cos l \cos d (1 - \tang l \tang d)^{-1} \ldots\ldots\ldots (b),$$

и разложивъ $\cos d$ и $\tang d$ въ ряды по возрастающимъ степенямъ дуги d, внесемъ вмѣсто d его величину изъ урав. (A)

Такимъ образомъ, если пожелаемъ ограничиться членами 2-го порядка, то достаточно положить $\cos d = 1$, $\tang d = d \sin 1''$, отъ чего будетъ

$$\cos l' \text{ или } \cos(l+d) = \cos l(1 - d\sin 1''.\tang l)$$
$$= \cos l(1 - a\sin 1'' \cos z \tang l)$$

Здѣсь вмѣсто d (подставили его приближенную величину $a\cos z$, получаемую изъ урав. (A) или (A‴). Послѣ чего внеся въ урав. (B′), вмѣсто $\cos l'$ найденное нами теперь выраженіе, получимъ

$$P = \frac{a\sin z}{\cos l}(1 + a\sin 1'' \cos z \tang l) \text{ (*)} \ldots\ldots\ldots\ldots (B''')$$

(*) Если же бы пожелали продолжить приближеніе до членовъ 3-го порядка, то надлежало бы въ урав. (b) положить $\tang d = d\sin 1''$ и $\cos d = 1 - \frac{1}{2}d^2\sin^2 1''$, отъ чего будетъ

$$\cos l' \text{ или } \cos(l+d) = \cos l(1 - d\sin 1''.\mathrm{tg}\, l)(1 - \tfrac{1}{2}d^2\sin^2 1'').$$

Подставя сіе выраженіе въ урав. (B″), получимъ

$$P = \frac{a\sin z}{\cos l}\left(1 - \tfrac{1}{6}a^2\sin^2 1'' + \tfrac{1}{6}\frac{a^2\sin^2 1''.\sin^2 z}{\cos^2 l}\right)(1 - d\sin 1''.\tang l)^{-1} \times$$
$$(1 - \tfrac{1}{2}d^2\sin^2 1'')^{-1},$$

$$\text{или} = \frac{a\sin z}{\cos l}\left(1 - \tfrac{1}{6}a^2\sin^2 1'' + \tfrac{1}{6}\frac{a^2\sin^2 1''\sin^2 z}{\cos^2 l}\right)(1 + d\sin 1''\tang l$$
$$+ d^2\sin 1''\,\mathrm{tg}^2 l)(1 + \tfrac{1}{2}d^2\sin^2 1'')$$

Но урав. (A), ограничиваясь членами 2-го порядка, дастъ

$$d = a\cos z - \tfrac{1}{2}a^2\sin 1''.\tang l.\sin^2 z;$$

Для примѣра вычислимъ уг. P по сей формулѣ принимая за данныя величины, предложенныя на стр. 8 именно: $l=56^\circ\, 28'\, 29'',81$, $z=140^\circ\, 30'\, 51'',79$, $\log K = 4.1667514$, и доп. $\log (N \sin 1'') = \bar{2}.8378771$:

K....4.1667514	a....3.0046285
доп.(N sin 1'') $\bar{2}$.8378771	sin z....9.8033782
a....3.0046285	sec l....0.2578237
	3.0658304.....1-й членъ = 1163'',67
	a....3.00463
	cos z....9.88749 —
	tang l....0.17880
	sin 1''....4.68557
	0.82232 —.....2-й членъ = — 6,64
	P = 1157,03
	или = 0° 19' 17'',03

Если же вычислимъ тотъ же уголъ P по формулѣ (B), то ходъ дѣйствія будетъ слѣдующій:

e....$\bar{2}$.9122	$\log a = 3.0046285$	sin a....7.6902014
cos l....9.7434	$a = 1010'',714$	sin z....9.8033782
e cos l....$\bar{2}$.6554	или = 0°16'50'',714	sec l'....0.2553500
$e^2\cos^2 l$...$\bar{3}$.3108 —		sin P....7.7489296
D....2.8939 —		
0.2047 +		P = 0° 19' 17'',06
$De^2\cos^2 l = +1'',60$		
L = 56° 15' 26, 64		
l' = 56. 15. 28, 24		

Изъ этого примѣра легко видѣть, что въ большей части случаевъ формула (B''') будетъ достаточна. Впрочемъ если пространство обнимаемое тригонометрическою сѣтью весьма обширно, то во избѣжаніе накопленія погрѣшностей, полезно

слѣд. если внесемъ сію величину въ предшествующее урав., развернемъ скобки, отбросимъ всѣ члены 4-го порядка, то по совершеніи всѣхъ преобразованій и не забывая, что $\frac{1}{\cos^2 l} = 1 + \tang^2 l$, а $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$, получимъ

$$P = \frac{a \sin z}{\cos l}\left[1 + a \sin 1'' \cos z . \tang l + \tfrac{1}{3} a^2 \cos^2 z \sin^2 1'' \, (1 + 4 \tang^2 l) - \tfrac{1}{3} a^2 \sin^2 1'' \tang^2 l\right] \ldots\ldots (B^{IV})$$

принять за правило, чтобы разность долготъ точекъ 1-го разряда вычислялась по формулѣ (B), а всѣхъ же прочихъ по формулѣ (B'''), по большей ея удобности.

§ 390. *Вычисленіе азимутовъ.* Примѣнимъ къ сферич. треуг-ку pMm (чер. 203), находящемуся на поверхности сферы, коей радіусъ есть нормаль N точки M, 4-ю аналогію Непера (см. Ч. I урав. (64)), принимая за данныя $pM=90°-l$, $pm=90°-l'$, (гдѣ l' есть неисправленная широта точки M'), и уг. $p=P$:

$$\tang \tfrac{1}{2}(M+m)=\cot \tfrac{1}{2}P \frac{\cos \frac{1}{2}(l'-l)}{\cos \frac{1}{2}(180°-l-l')}$$

или $$\cot \tfrac{1}{2}(M+m)=\tang \tfrac{1}{2}P \frac{\sin \frac{1}{2}(l'+l)}{\cos \frac{1}{2}(l'-l)}.$$

Но на чер. 203, уг. M изображаетъ данный азимутъ бока MM', а уг. m безъ чувствительной погрѣшности можетъ быть принятъ на сфероидѣ равнымъ углу $PM'M$, и какъ азимуты приняли мы считать отъ сѣвера къ востоку до 360°, то уг. $PM'M$ или $m=360°-z'$, гдѣ z' есть искомый азимутъ линіи MM' на горизонтѣ точки M'. И такъ, $\frac{1}{2}(M+m)=180°-\frac{1}{2}(z'-z)=90°-\frac{1}{2}(z'-z-180)$; послѣ чего

$$\cot \tfrac{1}{2}(M+m)=\tang \tfrac{1}{2}(z'-z-180°);$$

но меридіаны точекъ M и M' суть линіи почти параллельныя, пересѣкающіяся дугою MM' косвенно, такъ что $z'-180°$ почти $=z$. По причинѣ чрезвычайной малости избытка угла $z'-180°$ надъ z, называемаго *сближеніемъ меридіановъ,* можно вмѣсто тангенса дуги подставить самую дугу $\frac{1}{2}(z'-z-180°)$, равно какъ и вмѣсто $\tang \frac{1}{2}P$ дугу $\frac{1}{2}P$. Слѣд.

$$\tfrac{1}{2}(z'-z-180°)=\tfrac{1}{2}P.\frac{\sin \frac{1}{2}(l'+l)}{\cos \frac{1}{2}(l'-l)},$$

откуда $$z'=180°+z+P\frac{\sin(l+\frac{1}{2}d)}{\cos \frac{1}{2}d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C).$$

Такова формула служащая для опредѣленія искомаго азимута. При выводѣ ея мы отбросили члены 3-го порядка: но еслибы поступили какъ въ § 388, т. е. разложили тангенсы

малыхъ дугъ $\frac{1}{2}(z'-z-180^\circ)$ и $\frac{1}{2}$ P, по формулѣ (20) (см. Ч. I стр. 4), то получили бы

$$z'=180^\circ+z+P\left[1+\tfrac{1}{12}P^2-\tfrac{1}{12}P^2\frac{\sin^2(l+\frac{1}{2}d)}{\cos^2\frac{1}{2}d}\right]\frac{\sin(l+\frac{1}{2}d)}{\cos\frac{1}{2}d}\;\ldots\ldots(C')$$

§ 391. Для исключенія d изъ урав. (C′), развернемъ $\sin(l+\frac{1}{2}d)$, отъ чего дробь $\frac{\sin(l+\frac{1}{2}d)}{\cos\frac{1}{2}d}$ обратится въ $\sin l+\cos l.\text{tang}\,\frac{1}{2}d$ или $=\sin l+\frac{1}{2}d\sin 1''\cos l$. Подставя сію величину въ урав. (C′) и внеся $a\cos z$ (см. урав. A) вмѣсто d, а вмѣсто P величину выражаемую формулою (B‴), получимъ ограничиваясь членами 2-го порядка:

$$z'=180^\circ+z+a\sin z\,\text{tg}\,l+\tfrac{1}{2}a^2\sin^2 1''\sin z\cos z(1+2\,\text{tg}^2 l)\ldots\ldots(C'')$$

здѣсь $a=\frac{K}{N\sin 1''}$ означаютъ секунды. Для практическаго употребленія эта формула всегда бываетъ достаточна (*)

На прим. вычислимъ по сей формулѣ азимутъ дуги MM′ (чер. 203) при точкѣ M′, принимая за данныя величины, на стр. 8. На стр. 13 вычислено было нами что log a $=3.0046285$:

a....3.0046285	$\frac{1}{2}a$....$\bar{1}$.69897	
sin z....9.8033782	a^2....6.00926	
tang l....0.1788045	sin z....9.80338	
1-й чл....2.9868112	cos z....9.88749—	1-й членъ$=+970''$, 09
1-й членъ $=970''$, 09	sin 1″....4.68557	
	0.08467—.......	2-й членъ$=-1$, 22
180° 0′ 0″	2....0.30103	
z=140. 30. 51,79	tang² l....0.35761	
попр.=+0. 16. 3, 33	0.74331—.......	3-й членъ$=-5$, 54
z'=320. 46. 55, 12		поправка$=+963$, 33
		или$=0^\circ\,16'\,3''$,33.

(*) Впрочемъ еслибы пожелали азимутъ z' выразить посредствомъ точнѣйшаго ряда, т. е. посредствомъ членовъ 3-го порядка, то надлежало бы взять урав. (C′) и подставить въ него вмѣсто P величину, выраженную уравненіемъ (B^IV). Совершивъ это и отбрасывая члены, заключающіе a^4, по преобразованіи получимъ

$$z'=180^\circ+z+a\sin z\,\text{tang}\,l+\tfrac{1}{2}a^2\sin 1''\sin z\cos z(1+2\,\text{tang}^2 l)$$
$$+\tfrac{1}{3}a^3\sin^2 1''\sin z\cos^2 z\,\text{tg}\,l(3+4\,\text{tg}^2 l)-\tfrac{1}{6}a^3\sin^2 1''\sin z\,\text{tg}\,l(1+2\,\text{tg}^2 l)\ldots(C^{IV}).$$

§ 392. При выводѣ вышепредложенныхъ формулъ, выражающихъ азимутъ z', мы принимали землю сферическою, т. е. предполагали, что уг. $PM'M$=уг. pmM, хотя въ строгомъ смыслѣ оба эти угла не равны между собою, ибо 1-й изъ нихъ измѣряется угломъ между касательными лежащими въ плоскости перпендикулярной къ нормальной $M'N'$, а 2-й угломъ въ плоскости перпендикулярной къ прямой NM'. Займемся теперь выводомъ величины погрѣшности отъ этого предположенія.

Вообразимъ себѣ изъ точки M' (чер. 209) произвольнымъ радіусомъ описанную сферу: прямыя $M'N$, $M'N'$, и $M'M$ встрѣчаютъ эту сферу въ точкахъ α, β, γ, служащихъ вершинами сфер. треуг-ка $\alpha\beta\gamma$. Въ семъ треуг-кѣ уг. α измѣряется двуграннымъ угломъ, образуемымъ плоскостями $NM'F$ и $NM'M$, а слѣд. равенъ сферическому углу MmF, который есть найденный азимутъ z' безъ 180°, т. е. $\alpha = z' - 180°$; бокъ $\alpha\beta$ измѣряется плоскимъ угломъ $NM'N' = i$, выражающимъ поправку въ широтѣ отъ эллипсоидальности земли (см. примѣч. на стр. 6), и наконецъ бокъ $\alpha\gamma$ равенъ плоскому углу $NM'M$. Но въ прямол. треуг-кѣ $NM'M$ бока NM', NM, безъ чувствительной погрѣшности равны между собою, а уг. $M'NM = a$; слѣд. уг. $NM'M = 90° - \frac{1}{2}a$. И такъ, въ треуг-кѣ $\alpha\beta\gamma$ по извѣстнымъ двумъ бокамъ $\alpha\beta = i$, $\alpha\gamma = 90° - \frac{1}{2}a$, и заключающемуся между ними углу $\alpha = z' - 180°$ опредѣлится сфер. уг. $\alpha\beta\gamma$, измѣряющій двугранный уголъ между плоскостями $NM'N'$ и $N'M'M$; сей же уголъ выражаетъ на сфероидѣ уг. $PM'M = 360° - Z$, означая чрезъ Z истинный азимутъ линіи $M'M$ при точкѣ M'. Для опредѣленія сего угла Z, достаточно

въ формулѣ (C'') вмѣсто z', z, a, l

подставить Z, $z' - 180°$, i, $\frac{1}{2}a$

и получимъ $Z = z' - i \sin z' \tang \frac{1}{2}a$

но (см. примѣч. на стр. 6) $i = e^2 d \cos^2 l$ или $= a e^2 \cos z \cos^2 l$ и какъ z почти $= z' - 180°$, то

$$Z = z' + a \sin z \cos z \tang \tfrac{1}{2}a . e^2 \cos^2 l$$

или

$$Z = z' + \tfrac{1}{2}a^2 \sin z \cos z \sin 1'' . e^2 \cos^2 l$$

Здѣсь послѣдній членъ означаетъ очевидно искомую поправку, которую надобно придавать къ результату, доставляемому формулою (C''), съ тѣмъ знакомъ какой получится изъ вычисленія. Она очевидно уменьшается съ возрастаніемъ широты l; при каждой же широтѣ, величина ея зависитъ отъ величины азимута z; наибольшая величина поправки бываетъ при $z=45°, 135°, 225°$ и $315°$. Для вычисленія оной очевидно должно взять предпослѣдній членъ урав. (C'') и умножить его на $e^2\cos^2 l$. Для вышепредложеннаго примѣра будетъ

$$\begin{array}{rl} \text{2-й членъ урав. } (C'') \ldots & 0.08467- \\ e^2 \ldots & \bar{3}.82441 \\ \cos^2 l \ldots & 9.48435 \\ \hline & \bar{3}.39343- \ldots\ldots \text{поправка} = -0'',002 \end{array}$$

Этотъ примѣръ ясно показываетъ, что поправку въ азимутѣ отъ сфероидальности земли, по чрезвычайной ея незначительности, нѣтъ надобности вводить всегда въ вычисленіе, и потому формулу (C'') можно признавать достаточно точною.

B.) ФОРМУЛЫ ГАУССА.

§ 393. Пусть m и m' (чер. 205) будутъ какія либо двѣ точки триг. сѣти, соединяемыя одна съ другою линіею mm', коей угловая величина есть a, и z азимутъ сей дуги при точкѣ m, имѣющей широту $=l$. Требуется опредѣлить разность долготъ p, разность широтъ $l'-l=d$ обѣихъ точекъ и азимутъ z' сей дуги при точкѣ m', принимая на первый разъ земную поверхность *за правильный шаръ*.

Проведя чрезъ точку m' дугу $m'q$ перпендикулярную къ меридіану pm и положивъ $mq=x$, величина коей опредѣлится изъ сфер. треуг-ка mqm', посредствомъ уравненія

$$\tan x = \tan a . \cos z \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Если примѣнимъ къ сфер. треуг-ку mpm' урав. (60) сферической Тригонометріи, то будетъ

$$\frac{\tan p}{\tan z} = \frac{\sin mq}{\sin qp};$$

но $mq = x$, $qp = mp - x = 90° - (l + x)$; слѣд. получимъ

$$\tang p = \frac{\tang z \sin x}{\cos(l+x)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (b)$$

Далѣе треуг. $qm'p$, въ которомъ $qp = 90° - (l+x)$, уг. $mpm' = p$ и $m'p = 90° - l'$, даетъ

$$\tang l' = \cos p . \tang (l+x).$$

Внеся $1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}p$ вмѣсто $\cos p$, по преобразованіи найдемъ

$$\tang(l+x) - \tang l' = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}p . \tang(l+x).$$

Но какъ по урав. (17) стр. 4, ч. I, $\operatorname{tg}(l+x) - \operatorname{tg} l' = \dfrac{\sin(l+x-l')}{\cos(l+x)\cos l'}$,

и какъ треуг. $mm'p$ даетъ $\cos l' = \dfrac{\sin a . \sin z}{\sin p}$, то подставя, получимъ

$$\sin(l+x-l') = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}p}{\sin p} . \sin a \sin z . \sin(l+x),$$

или положивъ $l+x-l' = \sigma$, и не забывая, что $\sin p = 2\sin\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}p$, будетъ

$$\sin\sigma = \tang\tfrac{1}{2}p . \sin a \sin z \sin(l+x) \dots\dots\dots (c).$$

И такъ, найдя изъ урав. (a) величину вспомогательной дуги x, рѣшать урав. (b), опредѣляющее разность долготъ p, и потомъ урав. (c), изъ коего получится дуга σ; послѣ чего

$$d = l' - l = x - \sigma.$$

Наконецъ для опредѣленія азимута z' бока mm' при точкѣ m', изобразимъ чрезъ Z избытокъ сего азимута надъ 180°, т. е. $z' - 180° = Z = \mathrm{I}m'm$, и положимъ уг. $mm'q = \theta$, уг. $qm'p = \theta'$. Прямоугольные сфер. треуг-ки mqm' и pqm' даютъ

$$\sin qm' = \sin z \sin a = \cot\theta' . \cot(l+x)$$

откуда $\qquad \cot\theta' = \sin z . \sin a . \tang(l+x),$

или $\qquad \tang t = \sin z \sin a . \tang(l+x) \dots\dots\dots\dots (e),$

означая чрезъ t величину малаго угла, служащаго дополнительнымъ углу θ' до 90°, т. е. $\theta' = 90° - t$.

Далѣе сфер. прямоуг. треуг. $mm'q$, даетъ

$$\cot\theta = \cos a \tang z \quad \text{или} = \tang z - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a \tang z,$$

и какъ $Z+\theta+\theta'=180°$, а $\theta'=90°-t$, то $\theta=90°-(Z-t)$, $\cot\theta=\tan(Z-t)$; послѣ чего изъ нашего уравненія найдемъ

$$\tan z-\tan(Z-t)=2\sin^2\tfrac{1}{2}a.\tan z,$$

что обращается въ

$$\frac{\sin(z-Z+t)}{\cos(Z-t)}=2\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin z.$$

Но изъ того же треуг-ка имѣемъ $\sin x=\sin a.\sin\theta$ $=\sin a\cos(Z-t)$, и какъ $\sin a=2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$, то окончательно получимъ

$$\sin(z-Z+t)=\sin z.\tan\tfrac{1}{2}a.\sin x$$

или $$\sin\tau=\sin z\tan\tfrac{1}{2}a\sin x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(f)$$

положивъ для сокращенія

$$\tau=z-Z+t,\ \text{откуда}\ Z=z+t-\tau,$$

а слѣд. $$z'=180°+z+t-\tau\ldots\ldots\ldots\ldots(g)$$

§ 394. По затруднительности приискиванія въ логариѳмическихъ таблицахъ синусовъ и тангенсовъ малыхъ дугъ, каковы x, a, p, σ, t и τ, численное вычисленіе упростится если всѣ вышенайденныя нами уравненія выразимъ рядами слѣдующимъ образомъ:

1-е) урав. (a) по разложеніи $\tan x$ и $\tan a$, даетъ

$$x(1+\tfrac{1}{3}x^2\sin^2 1'')=a(1+\tfrac{1}{3}a^2\sin^2 1'')\cos z;$$

для 1-го приближенія имѣемъ $x=a\cos z$; послѣ чего возведя въ 3-ю степень и подставя вмѣсто x^3, по преобразованіи найдемъ

$$x=a\cos z\ (1+\tfrac{1}{3}a^2\sin^2 z\sin^2 1'')\ldots\ldots\ldots\ldots(a')$$

2-е) урав. (b) по разложеніи $\tan p$ и $\sin x$, обратится въ

$$p(1+\tfrac{1}{3}p^2\sin^2 1'')=\frac{\tan z}{\cos(l+x)}x\ (1-\tfrac{1}{6}x^2\sin^2 1'').$$

Подставя сюда вмѣсто x выведенную нами теперь его величину, и отбрасывая члены 4-го порядка, получимъ

$$p(1+\tfrac{1}{3}p^2\sin 1'')=\frac{a\sin z}{\cos(l+x)}(1+\tfrac{1}{3}a^2\sin^2 z\sin^2 1''-\tfrac{1}{6}a^2\cos^2 z\sin^2 1'');$$

Для 1-го приближенія имѣемъ $p = \frac{a \sin z}{\cos(l+x)}$; подставя 3-ю степень сей величины во 2-й членъ, будетъ

$$p = \frac{a \sin z}{\cos(l+x)} \left(1 + \tfrac{1}{3} a^2 \sin^2 1'' \sin^2 z - \tfrac{1}{6} a^2 \cos^2 z . \sin^2 1'' - \tfrac{1}{3} \frac{a^2 \sin^2 z \sin^2 1''}{\cos^2(l+x)} \right)$$

$$\text{или } p = \frac{a \sin z}{\cos(l+x)} \left\{ 1 - \tfrac{1}{3} a^2 \sin^2 z \sin^2 1'' \operatorname{tg}^2(l+x) - \tfrac{1}{6} a^2 \cos^2 z \sin^2 1'' \right\} \ldots (b')$$

3-е) урав. (c) по разложеніи $\sin\sigma$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}p$ и $\sin a$, по внесеніи вмѣсто p его величины, выражаемой уравненіемъ (b'), и по сокращеніи, даетъ

$$\sigma = \tfrac{1}{2} a^2 \sin^2 z \operatorname{tg}(l+x) \sin 1'' \left\{ 1 - \tfrac{1}{4} a^2 \sin^2 z \operatorname{tg}^2 (l+x) \sin^2 1'' - \tfrac{1}{4} a^2 \cos^2 z \sin^2 1'' - \tfrac{1}{12} a^2 \sin^2 1'' \right\} \ldots\ldots (c').$$

4-е) Такимъ же образомъ изъ урав. (e), по разложеніи въ немъ $\operatorname{tang} t$ и $\sin a$, получимъ

$$t = a \sin z \operatorname{tg}(l+x) \left\{ 1 - \tfrac{1}{6} a^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{3} a^2 \sin^2 z \operatorname{tg}^2 (l+x) \sin^2 1'' \right\} \ldots (c')$$

Наконецъ 5-е) урав. (f), по разложеніи $\sin\tau$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ и $\sin x$; даетъ

$$\tau - \tfrac{1}{6}\tau^3 \sin^2 1'' = \sin z (\tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{24} a^3 \sin^2 1'') (x \sin 1'' - \tfrac{1}{6} x^3 \sin^2 1'')$$

отбрасывая членъ $\frac{1}{6}\tau^3 \sin^2 1''$, какъ 6-го порядка, развернувъ скобки, подставя вмѣсто x его величину, выражаемую уравненіемъ (a'), по преобразованіи, и не забывая, что $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$, получимъ ограничиваясь членами 4-го порядка

$$\tau = \tfrac{1}{2} a^2 \sin z \cos z \sin 1'' \left\{ 1 + \tfrac{5}{12} a^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2} a^2 \cos^2 z \sin^2 1'' \right\} \ldots\ldots (f').$$

§ 395. Для большаго удобства при вычисленіи по вышепредложеннымъ формуламъ, положимъ для сокращенія

$$\alpha = a \cos z, \beta = a \sin z, \gamma = \frac{a \sin z}{\cos(l+x)} \text{ или} = \frac{\beta}{\cos(l+x)}, \delta = \gamma . \sin(l+x)$$

послѣ чего уравненія (a'), (b'), (c') и (f') обратятся въ

$$x = \alpha (1 + \tfrac{1}{3}\beta^2 \sin^2 1'')$$
$$p = \gamma (1 - \tfrac{1}{3}\delta^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{6}\alpha^2 \sin^2 1'')$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\beta\delta \sin 1'' (1 - \tfrac{1}{4}\delta^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{4}\alpha^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{12} a^2 \sin^2 1'')$$
$$t = \delta (1 - \tfrac{1}{6} a^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{3}\delta^2 \sin^2 1'')$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\alpha\beta \sin 1'' (1 + \tfrac{5}{12} a^2 \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin^2 1'')$$

Но какъ извѣстно, что если имѣется вообще какая либо малая величина y, то $\log(1\pm y)=\pm My$, гдѣ M есть модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ. Примѣнивъ это къ нашимъ уравненiямъ, найдемъ

$$\log x=\log\alpha+\tfrac{1}{3}M\sin^2 1''.\beta^2$$
$$\log p=\log\gamma-\tfrac{1}{6}M\sin^2 1''(2\delta^2+\alpha^2)$$
$$\log\sigma=\log(\tfrac{1}{2}\beta\delta\sin 1'')-\tfrac{1}{12}M\sin^2 1''(3\delta^2+3\alpha^2+a^2)$$
$$\log t=\log\delta-\tfrac{1}{6}M\sin^2 1''(a^2+2\delta^2)$$
$$\log\tau=\log(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\sin 1'')+\tfrac{1}{12}M\sin^2 1''(5a^2-6a^2)$$

или для краткости положивъ $\frac{1}{12}M\sin^2 1''=\mu$, получимъ

$$\log x=\log\alpha+4\mu\beta^2 \ldots\ldots (1)$$
$$\log p=\log\gamma-4\mu\delta^2-2\mu\alpha^2 \ldots\ldots (2)$$
$$\log\sigma=\log(\tfrac{1}{2}\beta\delta\sin 1'')-3\mu\delta^2-3\mu\alpha^2-\mu a^2 \ldots\ldots (3)$$
$$\log t=\log\delta-2\mu a^2-4\mu\delta^2 \ldots\ldots (4)$$
$$\log\tau=\log(\tfrac{1}{2}\alpha\beta\sin 1'')+5\mu a^2-6\mu\alpha^2 \ldots\ldots (5)$$

не забывая, что $l'-l=d=x-\sigma$, $z'=180°+z+t-\tau$ и $\log\mu=\overline{13}.92975$.

Таковы суть формулы Гаусса, служащiя для рѣшенiя сферическаго весьма остроугольнаго треугольника по даннымъ двумъ бокамъ и заключающемуся между ними углу. Онѣ замѣчательны по своей простотѣ и строгой точности, ибо заключаютъ въ себѣ члены 4-го порядка включительно (*). На основанiи теорiи, изложенной нами въ § 386, легко заключимъ, что если въ эти гауссовы формулы вмѣсто a подставимъ $\frac{K}{N\sin 1''}$, (гдѣ K есть линейная длина бока, а N нормаль подъ широтою l), то уголъ p опредѣляемый формулою (2) выразитъ искомую разность долготъ на земномъ сфероидѣ, и потому результатъ вычисленiя сего угла не потребуетъ ни какой поправки, а угловая величина дуги $d=x-\sigma$ (по уравненiямъ (1) и (3)) разность широтъ на шарѣ, коего радiусъ есть $N=\frac{A}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)}}$; для опредѣленiя же истинной раз-

(*) $\log\alpha$, $\log\gamma$ и $\log\delta$ вводятся въ уравненiя (1), (2), и (4) съ 7-ю десятичными цифрами, а всѣ прочiе члены формулъ съ 4-ю знаками.

ности D широтъ на эллипсоидѣ, достаточно найденную дугу d умножить на $\frac{N}{\varrho}$, гдѣ N имѣетъ прежнее значеніе, а ϱ есть радіусъ кривизны меридіана подъ широтою $l + \frac{1}{2}d$; послѣ чего искомая широта опредѣляемой точки будетъ $L = l + d\frac{N}{\varrho} = l + D$. Наконецъ поправку въ найденномъ азимутѣ, нѣтъ надобности вводить въ вычисленіе, по причинѣ ея не значительности (*).

—

ГЛАВА II.

О координатахъ.

§ 396. Если бы находясь на какой либо данной точкѣ мѣстности, привели оптическую ось трубы теодолита или пасажнаго иструмента въ плоскость меридіана и замѣтили на краю горизонта точку мѣстности, покрываемую центромъ нитей; потомъ перейдя на сію вторую точку и наведя центръ нитей трубы на прежнюю точку стоянія, замѣтили третью точку мѣстности, находящуюся на противуположной сторонѣ горизонта, и т. д.; то линія умственно проведенная чрезъ всѣ сіи точки очевидно означила бы на поверхности земли направленіе дуги меридіана.

Но если бы находясь на начальной точкѣ, привели трубу инструмента не въ плоскость меридіана, а въ плоскость 1-го вертикала, то поступая по вышесказанному, означилась бы на поверхности земли линія, именуемая *перпендикуляромъ*

(*) Гауссъ въ статьѣ подъ заглавіемъ Untersuchungen über die Gegenstände der höhern Geodäsie, примѣнилъ предложенныя нами формулы къ вычисленію географическаго положенія точекъ, на основаніи особой теоріи, которая будетъ нами изложена въ прибавленіи I къ Высшей Геодезіи.

къ меридіану. Эта линія была бы дугою большаго круга и выразила бы сѣченіе земной поверхности плоскостію 1-го вертикала въ томъ только случаѣ, когда земля была бы правильный шаръ, и тогда продолженіе этой линіи встрѣтило бы экваторъ въ двухъ точкахъ, которыя служили бы полюсами меридіана. Но какъ земля есть эллипсоидъ вращенія, то перпендикуляръ къ меридіану различествуетъ отъ сѣченія земной поверхности плоскостью 1-го вертикала, ибо это сѣченіе, какъ уже намъ извѣстно, есть эллипсисъ (см. § 167), тогда какъ перпендикуляръ къ меридіану есть *кривая двойной кривизны.* И дѣйствительно, отвѣсныя линіи взятыя подъ различными широтами не будутъ встрѣчать земную ось въ одной и той же точкѣ, ибо земля не есть сфера, но эллипсоидъ вращенія. Если къ меридіану Pa (чер. 206) проведемъ чрезъ точку a перпендикуляръ ab и предположимъ его весьма малымъ, то онъ будетъ находиться въ отвѣсной плоскости iab, проходящей чрезъ нормаль ai. Если перейдемъ на оконечность b сей дуги, которой отвѣсная линія или нормаль точки b есть bk, пересѣкающая ось земли въ k, то для продолженія дуги ab на горизонтѣ точки b, надлежитъ перегнуть ее по направленію 2-й отвѣсной плоскости bkc, а посему дуга bc будетъ находиться внѣ 1-й отвѣсной плоскости. Такимъ же образомъ докажется, что дуга cd будетъ находиться въ 3-й отвѣсной плоскости dcl, и т. д. Слѣд. кривая $abcd$..... составлена изъ многихъ весьма малыхъ дугъ, находящихся въ различныхъ отвѣсныхъ плоскостяхъ и коихъ направленія безпрерывно измѣняются (*).

(*) Все сказанное здѣсь о перпендикулярѣ къ меридіану, непосредственно примѣняется ко всякой линіи на земномъ сфероидѣ, ибо принимая землю за правильный эллипсоидъ вращенія, отвѣсныя линіи проведенныя чрезъ всѣ точки дуги, выражающей кратчайшее разстояніе между какими либо пунктами, не будутъ находиться въ одной и той же плоскости, исключая только того случая, когда сіи пункты лежатъ на одномъ меридіанѣ. Отсюда заключаемъ, что изъ всѣхъ дугъ, направленіе коихъ можемъ означить на поверхности земли, одна только дуга меридіана есть плоская кривая; всѣ же прочія суть кривыя двойной кривизны. Не должно впрочемъ

Впрочемъ не должно выпускать изъ виду, что перпендикуляръ къ меридіану, на разстояніи незначительномъ, безъ чувствительной погрѣшности можно принимать за сѣченіе земной поверхности плоскостію 1-го вертикала, и даже за дугу круга, коего радіусъ есть нормаль при точкѣ пересѣченія сей дуги съ меридіаномъ (см. § 173).

§ 397. Меридіанъ и перпендикуляръ къ меридіану, проведенные чрезъ одну изъ точекъ сѣти, принимаютъ въ Геодезіи за оси координатъ, въ отношеніи которыхъ опредѣляютъ положеніе всѣхъ прочихъ точекъ различнымъ образомъ:

1-е) Если станемъ разсматривать часть земной поверхности за *плоскость,* (что можно допустить въ томъ только случаѣ, когда пространство покрытое тригон. сѣтью незначительно), то достаточно изъ всѣхъ ея точекъ опустить на меридіанъ перпендикуляры и принявъ ихъ за ординаты, а разстоянія подошвъ ихъ отъ начала осей за абсциссы, опредѣлить длину сихъ координатъ руководствуясь простыми началами прямолинейной тригонометріи. Этотъ способъ опредѣленія точекъ былъ предложенъ Францискомъ Кассини и былъ имъ примѣненъ къ составленію топографической карты Франціи.

2-е) Если же станемъ разсматривать землю за *сферу* или за *эллипсоидъ вращенія,* и положимъ, что AP (чер. 211) представляетъ меридіанъ проходящій чрезъ точку A, принимаемую за начало осей и именуемую *главною точкою сѣти,* а

забывать, что выведенное нами слѣдствіе справедливо до тѣхъ поръ, пока станемъ принимать земной сфероидъ за правильный эллипсоидъ вращенія. Но какъ уже намъ извѣстно (§ 183 и 184), что въ строгомъ смыслѣ земля есть сфероидъ неправильный и существуетъ дѣйствительное уклоненіе отвѣсныхъ линій, то самое предположеніе наше, что сіи послѣднія будучи продолжены встрѣчаютъ земную ось, уже не точно; если же сіи линіи не встрѣчаютъ земной оси, то означая направленіе меридіана, какъ объяснено выше, получится также кривая двойной кривизны. И такъ, въ строгомъ смыслѣ, подъ словомъ дуги земнаго меридіана, должно разумѣть не сѣченіе земной поверхности плоскостію, проходящею чрезъ какую либо данную точку и оба земные полюса, но такую кривую, на коей въ одинъ и тотъ же моментъ считается одинаковое время.

ОА дугу къ нему перпендикулярную, (которую впредь будемъ называть *главнымъ перпендикуляромъ*), то опустивъ изъ какой либо точки М два перпендикуляра — одинъ QM на меридіанъ AP, а другой MG на главный перпендикуляръ АО, произойдетъ сфер. четыреугольникъ AQMG, въ коемъ углы Q, A и G суть прямые, а противуположные бока не равны между собою. Такъ какъ для построенія этого четыреугольника на сферѣ или на сфероидѣ, достаточно знать какія либо двѣ смежныя его стороны, т. е. AQ и QM, или QM и MG, или MG и AG, или наконецъ AQ и AG, то изъ сего заключаемъ, что каждыя двѣ таковыя стороны можно принимать за сферическія координаты, опредѣляющія положеніе точки на сферѣ, относительно осей AP и АО (*), и что слѣд. существуетъ четыре различныя системы. Французскіе ученые, а въ послѣдствіи и большая часть геодезистовъ въ разныхъ странахъ Европы, за координаты точки М, принимали дуги MQ и AQ, т. е. длину дуги перпендикуляра MQ опускаемаго изъ М на меридіанъ и разстояніе AQ его подошвы отъ начала А осей: эти координаты впредь будемъ называть *исправленною кассиніевскою системою*, или просто *сферическими координатами*.

Генералъ же Шубертъ во всѣхъ геодезическихъ дѣйствіяхъ произведенныхъ подъ его руководствомъ, за координаты точки М принялъ дуги AQ и AG, выражающія разстоянія начала осей отъ подошвъ Q и G перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ М на оси координатъ. Прочія двѣ системы доселѣ не были во все введены въ употребленіе, по причинѣ ихъ неудобства.

Кромѣ вышесказанныхъ четырехъ системъ координатъ положеніе точекъ триг. сѣти опредѣлится, если каждую изъ нихъ, на прим. М (чер. 213), соединимъ дугою большаго круга съ главною точкою А и найдемъ какъ длину сей дуги, такъ и величину угла PAM, т. е. ея азимутъ. Этотъ способъ опредѣленія точекъ предложенъ Бесселемъ и называется способомъ *полярныхъ координатъ*.

(*) Меридіанъ AP принимается всегда за ось x-въ, а главный перпендикуляръ АО за ось y-въ.

А.) СПОСОБЪ КАССИНИ.

§ 398. Пусть A, M, M′, M″.... (чер. 221) будутъ послѣдовательныя точки сѣти, соединяемыя одна съ другою боками AM=K, MM′=K′, M′M″=K″..... треугольниковъ; положимъ далѣе, что первая изъ нихъ, т. е. точка A, (географическое положеніе коей съ строгою точностію извѣстно) берется за начало осей. Проведя чрезъ нее меридіанъ AP, и возставя перпендикуляръ AO, первый принимаемъ за ось x-въ, а второй за ось y-въ. Перпендикуляры $MQ=y$, $M'Q'=y'$, $M''Q''=y''$...., опущенные изъ всѣхъ точекъ сѣти на меридіанъ, будутъ служить ординатами, а части $AQ=x$, $AQ'=x'$, $AQ''=x''$..... меридіана, заключающіяся между началомъ осей и подошвами вышесказанныхъ перпендикуляровъ, абсциссами. Требуется для каждой точки опредѣлить ординату и асбциссу.

Изобразимъ уг. MAP, т. е. данный азимутъ бока AM=K, чрезъ z, а углы $M'Mn$, $M''M'n'$..... составляемые прочими боками сѣти съ прямыми Mn, $M'n'$..... параллельными къ меридіану чрезъ z', z''..... Эти прямыя называются *дирекціональными линіями*, а вышесказанные углы (т. е. образуемые ими съ боками сѣти) *дирекціональными углами* (*). Дирекціональные углы принято считать подобно азимутамъ въ одну сторону отъ сѣвера къ востоку до 360°.

Если предположимъ азимутъ для 1-го бока и дирекціональные углы всѣхъ прочихъ боковъ предварительно извѣстными, то координаты опредѣлятся послѣдовательно по правиламъ Прямолинейной Тригонометріи, ибо

для 1-й точки M, изъ прямоуг-го треуг-ка AMQ, имѣемъ

$$y = K\sin z,\quad x = K\cos z \;.................. (1);$$

(*) Дирекціональныя линіи, принимая во вниманіе сферическій видъ земли, суть дуги большихъ круговъ перпендикулярныхъ къ главному перпендикуляру. Очевидно, онѣ различествуютъ отъ меридіановъ, проходящихъ чрезъ тѣ же точки сѣти, ибо меридіаны сходятся у земнаго полюса, а дирекціональныя линіи у полюса главнаго перпендикуляра.

для 2-й точки M′, такъ какъ

$$y' \text{ или } M'Q' = y + fM', \; x' \text{ или } AQ' = x + fM;$$

но fM' и fM суть катеты прямоуг-го треуг-ка fMM', то

$$\left.\begin{array}{l} y' = y + K'\sin z' \\ x' = x + K'\cos z' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

§ 399. Отъ принятаго условія считать дирекціональные углы въ одну сторону, члены заключающіе синусы и косинусы, могутъ войдти въ вычисленіе отрицательными, а именно: членъ $K^{(n)}\sin z^{(n)}$, будетъ отрицательнымъ если $z^{(n)} > 180°$ и $< 360°$, а членъ $K^{(n)}\cos z^{(n)}$, когда $z^{(n)} > 90°$ и $< 270°$. Такъ на прим. для точки M″, при коей уг. $n'M'M'' = z'' > 90°$, послѣдній членъ въ урав. $x'' = x' + K''\cos z''$ будетъ отрицательный, что видно изъ чертежа, ибо x'' или $AQ'' = AQ' - M'f' = x' - K''\cos f'M'M''$.

Сверхъ того, отъ вышесказаннаго условія считать азимуты и дирекціональные углы, происходитъ еще и та выгода, что по знаку, находящемуся предъ координатами, можно заключить въ какомъ изъ четырехъ угловъ, составляемыхъ осями координатъ, находится опредѣляемая точка. Такимъ образомъ

въ	углѣ	сѣверо-восточномъ	y, x	со	знакомъ	+
»	»	юго-восточномъ	y	»	»	+
			x	»	»	—
»	»	юго-западномъ	y	»	»	—
			x	»	»	—
»	»	сѣверо-западномъ	y	»	»	—
			x	»	»	+

Причина сему также очевидна, ибо если возьмемъ урав. (1), соотвѣтствующія 1-й точкѣ M и станемъ въ нихъ увеличивать уг. $PAM = z$, отъ 0° до 360°, то синусы и косинусы будутъ перемѣнять знаки сообразно съ тѣмъ, въ которомъ изъ вышесказанныхъ угловъ будетъ находиться эта точка.

§ 400. Въ заключеніе остается объяснить какимъ образомъ опредѣляются дирекціональные углы для всѣхъ боковъ сѣти по данному азимуту z при начальной точкѣ A. Изобразимъ углы AMM', $MM'M''$. . . . образуемые боками сѣти чрезъ

α, α', α''..... Для бока MM', дирекціональный уг. nMM' очевидно будетъ $=180°-GMM'$; но уг. $GMM'=\alpha-AMG$ $=\alpha-z$; слѣд.

$$z'=180°+z-\alpha.$$

Такимъ же образомъ для бока M'M'', дирекціональный уг. $n'M'M''=z''=180°-G'M'M''$; но уг. $G'M'M''=\alpha'-MM'G'$ $=\alpha'-z'$; а посему

$$z''=180°+z'-\alpha'.$$

Если же бы уголъ между боками сѣти обращенъ былъ въ сторону противоположную, какъ на прим. для бока mM', то изобразивъ уг. $MM'm$ чрезъ α_1, а искомый дирекціональный уголъ сего бока $M'm$ чрезъ z_1, очевидно получимъ

$$z_1=180°+GM'M+MM'm \text{ или } =180°+z'+\alpha_1$$

Такимъ же образомъ для угла $MM'm'=\alpha_2$, дирекціональный уг. z_2 бока $M'm'$ будутъ $z_2=\alpha_2-MM'n'$ или $z_2=\alpha_2-(180°-z')=\alpha_2+z'-180°$. Приложивъ же ко 2-й части сего уравненія 360°, (что можно всегда допустить, ибо значеніе тригон. линій сего угла не измѣнится), получимъ

$$z_2=180°+z'+\alpha_2.$$

Изъ сего легко заключить, что *дирекціональный уголъ какого либо бока равняется* 180°+*дирекціональный уголъ предшествующаго бока* $\pm$ *уголъ сѣти, составляемый сими боками.* Знакъ + должно брать тогда, когда сей уголъ находится по правую сторону наблюдателя, стоящаго въ вершинѣ угла и обращеннаго лицомъ къ предшествующей точкѣ, а знакъ — когда сей уголъ находится по лѣвую его сторону. Если изъ вычисленія искомый уголъ получится болѣе чѣмъ 360°, то очевидно надлежитъ изъ него вычесть 360°.

§ 401. Объяснимъ все вышеизложенное примѣромъ.

Положимъ, что A, M, M', M''..... (чер. 225) представляютъ послѣдовательныя точки сѣти, соединяемыя посредствомъ боковъ K, K', K''....., которыхъ длина и углы M, M', M'' ими составляемые суть

$K\ =8569$ саж.	$M\ =50°23'40''$,	азимутъ z бока $MA=52°15'30''$
$K'\ =11323$,	$M'\ =47.15.20$	
$K''=15729$,	$M''=71.35.10$	
$K'''=30273$,	$M'''=67.13.\ 5$	
$K^{IV}=25891$,		

Изъ чертежа видимъ, что только уг. при M, лежитъ по лѣвую сторону бока K; всѣ же прочіе лежатъ по правую сторону, а слѣд. по совершеніи вычисленія, найдемъ:

дирекціональный	уг.	бока	K' при	$M\ =181°51'50''$	
»	»	»	K'' »	$M'\ =409.\ 7.10$	или $49°7'10''$
»	»	»	K''' »	$M''=300.42.20$	
»	»	»	K^{IV} »	$M'''=187.55.25$	

Вычисленіе координатъ точки M.

K....3.9329301	....	3.9329301	
sin z....9.8980549		cos z....9.7868240	
3.8309850...$y=+6776{,}2$		3.7197541.......	$x=+5245{,}1$

Вычисленіе координатъ точки M′

K′....4.0539615	....	4.0539615	
sin z′....9.5122208—		cos z′....9.9997702—	
2.5661823—.....—368,3		4.0537317—........	—11317,0
	$y=+6776{,}2$		$x=+5245{,}1$
	$Y=+6407{,}9$		$X=-6071{,}9$

Продолжая подобнаго рода вычисленіе, найдемъ:

Для точки M''	$Y=+18300{,}2$,	$X=+4222{,}5$,
M'''.....	$Y=-7728{,}6$,	$X=+19680{,}7$,
M^{IV}.....	$Y=-11297{,}7$,	$X=-5963{,}1$.

§ 402. Если по даннымъ координатамъ двухъ точекъ, на прим. (чер. 221) $MQ=y$, $AQ=x$, и $M'Q'=y'$, $AQ'=x'$, требуется опредѣлить длину линіи $MM'=K$ и дирекціональный уг. $nMM'=z$, то изъ прямоуг-го треуг-ка $MM'f$ по даннымъ его катетамъ $M'f=y'-y$ и $Mf=x'-x$, получимъ

$$\tang z=\frac{y'-y}{x'-x},\ K=\frac{y'-y}{\sin z}=\frac{x'-x}{\cos z}.$$

§ 403. Въ § 151 изложенъ былъ нами способъ опредѣленія точки по тремъ даннымъ. Но въ томъ рѣшеніи предполагалось, что данныя точки служили вершинами треугольника

сѣти, и слѣд. какъ длина боковъ, такъ и величина его угловъ были величины извѣстныя. Если же бы случилось, что наблюдаемыя точки служили вершинами различныхъ треугольниковъ, тогда по вычисленнымъ координатамъ сихъ точекъ, на основаніи предшествующаго §, опредѣлили бы длину боковъ ихъ соединяющихъ и величину дирекціональныхъ угловъ, зная которые, не трудно уже будетъ найдти величину угловъ сими боками составляемаго, и потомъ примѣнить теорему § 151.

Впрочемъ здѣсь предлагаемъ другой способъ рѣшенія той же задачи.

Пусть M, M′, M″ (чер. 207) будутъ три точки, которыхъ данныя координаты суть (b, a), (b', a') и (b'', a''), и требуется найдти координаты (y, x) точки D, при коей измѣрены были углы $MDM'=\beta$, $MDM''=\beta'$, считаемые отъ 1-й точки M влѣво лежащей. Принимаемъ разстоянія $MM'=K$ и $MM''=K'$, также какъ и дирекціональные углы $M'Mx=\alpha$ и $M''Mx=\alpha'$, за величины неизвѣстныя. На основаніи предшествующаго §, имѣемъ

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для точки } M' \ldots & \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b'-b}{a'-a},\ K=\dfrac{b'-b}{\sin\alpha}=\dfrac{a'-a}{\cos\alpha} \\ \text{» » } M'' \ldots & \operatorname{tg}\alpha'=\dfrac{b''-b}{a''-a},\ K'=\dfrac{b''-b}{\sin\alpha'}=\dfrac{a''-a}{\cos\alpha'} \end{array}\right\}\ldots\ldots (3).$$

Если изобразимъ искомый дирекціональный уголъ при точкѣ D линіи $MD=d$ чрезъ z, то будетъ уг. $M'MD=180°-(\alpha-z)$, уг. $M''MD=180°-(\alpha'-z)$, уг. $MM'D=\alpha-z-\beta$, уг. $MM''D=\alpha'-z-\beta'$; или для краткости положивъ

$$\alpha-\beta=n,\ \alpha'-\beta'=n'$$

получимъ $$MM'D=n-z,\ MM''D=n'-z.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Послѣ чего треуг. } MM'D \text{ даетъ } & d=\dfrac{K\sin(n-z)}{\sin\beta} \\ \text{а треуг. } MM''D \ldots\ldots\ldots\ldots & d=\dfrac{K'\sin(n'-z)}{\sin\beta'} \end{array}\right\}\ldots\ldots (4)$$

откуда $$\frac{\sin(n-z)}{\sin(n'-z)}=\frac{K'\sin\beta}{K\sin\beta'}.$$

Означивъ чрезъ ψ вспомогательную дугу, коей котангенсъ равенъ 2-й части сего уравненія, или

$$\frac{K\sin\beta'}{K'\sin\beta}=\tang\psi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

получимъ

$$\frac{\sin(n-z)}{\sin(n'-z)}=\frac{1}{\tang\psi}$$

откуда

$$\frac{\sin(n-z)+\sin(n'-z)}{\sin(n-z)-\sin(n'-z)}=\frac{1+\tang\psi}{1-\tang\psi},$$

что по уравненіямъ (15 и 8) Ч. I стр. 3 и 4, обращается въ

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(n+n'-2z)}{\tang\frac{1}{2}(n-n')}=\tang(45°+\psi)$$

откуда

$$\tang\tfrac{1}{2}(n+n'-2z)=\tang\tfrac{1}{2}(n-n').\tang(45°+\psi)$$

Здѣсь 2-я часть извѣстна, а потому если приравняемъ ее $\tang\varphi$, т. е.

$$\tang\varphi=\tang\tfrac{1}{2}(n-n')\tang(45°+\psi)\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

то найдемъ дугу φ, которая выразитъ

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(n+n'-2z)$$

откуда

$$z=\tfrac{1}{2}(n+n')-\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Само собою разумѣется, что если бы оказалось $\varphi>\frac{1}{2}(n+n')$ то надлежало бы придать 360° къ $\frac{1}{2}(n+n')$. Такимъ же образомъ слѣдовало бы поступить при рѣшеніи уравненій (4) въ томъ случаѣ, когда $n<z$ и $n'<z$.

Изъ вышеизложеннаго легко заключить, что ходъ вычисленія будетъ слѣдующій: найдя изъ урав. (3) величину дирекціональныхъ угловъ α и α' и длину разстояній K и K', подставятъ сіи послѣднія въ урав. (5), которое дастъ величину вспомогательной дуги ψ. Послѣ того изъ урав. (6) получатъ величину дуги φ, а изъ урав. (7) искомый дирекціональный уг. z. Останется послѣ того рѣшить одно изъ урав. (4), по опредѣленіи изъ коего длины линіи $MD=d$, искомыя координаты y и x точки D, будутъ

$$y=b-d\sin z,\quad x=a-d\cos z\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Объяснимъ примѣромъ:

Для опредѣленія координатъ Пулковской обсерваторіи из-

мѣрены были углы между с. Кузьминымъ и Дудергофомъ, и между с. Кузьминымъ и Петропавловскимъ шпилемъ. Данныя координаты сихъ пунктовъ и измѣренные углы были слѣдующіе:

	абсциссы.	*ординаты.*	*углы.*
С. Кузьм. M...	$a = -10131{,}361$,	$b = +\ 2387{,}743$,	$MDM' = \beta = 100°37'47'',40$
Дудерг. M'...	$a' = -12923{,}868$,	$b' = -\ 3575{,}996$,	
Петроп. M''..	$a'' = +\ 448{,}366$,	$b'' = +\ 302{,}934$,	$MDM'' = \beta' = 233.24.26,25.$

вычисл. урав. (3)

$b' - b = -5963{,}739$ ... 3.7755187 —, $b'' - b = -\ 2084{,}809$ ... 3.3190663 —

$a' - a = -\ 2792{,}507$ ... 3.4459943 —, $a'' - a = +10579{,}729$ ... 4.0244745 +

tang α .. 0.3295244 +	tang α' .. 9.2945918 —
$\alpha = 244°54'31'',56$,	$\alpha' = 348°51'\ 8'',96$
$\beta = 100.37.47,40$	$\beta' = 233.24.26,25$
$n = 144.16.44,16$	$n' = 115.26.41,91$
$n' = 115\ 26.41,91$	
$n + n' = 259.43.26,07$	$\frac{1}{2}(n + n') = 129°51'43''03$
$n - n' = 28.50.\ 2,25$	$\frac{1}{2}(n - n') = 14.25.\ 1,12$

вычисл. урав. (3) и (5)

$a' - a$ .... 3.4459943 —	$a'' - a$ 4.0244745
доп. cos α .... 0.3725718 —	доп. cos α' 0.0082725
K .. 3.8185661 +	K' 4.0327470
sin β' .... 9.9046580 —	sin β 9.9924825
K sin β' .... 3.7232241 —	K' sin β 4.0252295
доп. K' sin β .... $\bar{5}$.9747705	
tang ψ .... 9.6979945 —	$\psi = -26°30'48'',96$
	$45° + \psi = 18.29.11,04$

вычисленіе урав. (6), (7), (4) и (8).

tg$\frac{1}{2}(n - n')$ 9.4100552	K 3.8185661	
tg$(45° + \psi)$ 9.5241772	sin $(n - z)$ 9 5198246	
tang φ 8.9342324	доп. sin β 0.0075175	
$\varphi = 4°54'44'',44$	d 3.3459084	
$\frac{1}{2}(n + n') = 129.51.43,03$	sin z 9.9136314	$b = +2387{,}743$
$z = 124.56.58,59$	3.2595398	$-1817{,}774$
$n = 144.16.44,16$		$y = +\ 569{,}969$
$n - z = 19.19.45,57$	d 3.3459084	
	cos z .... 9.7580452 —	$a = -10131{,}361$
	3.1039536 —	$+\ 1270{,}438$
		$x = -8860{,}923$

§ 404. Задача *опредѣленія двухъ точекъ по двумъ даннымъ,* въ практическомъ отношеніи, не менѣе важна, какъ и опредѣленія точки по тремъ даннымъ. Въ § 153 нами было изложено рѣшеніе сего вопроса; здѣсь помѣщаемъ другое рѣшеніе, предложенное астрономомъ *Гансеномъ* и заслуживающее вниманія (см. *Astron. Nachrichten,* № 419).

Пусть A и B (чер. 210) будутъ данныя точки, которыхъ координаты суть (y, x) и $(y', x',)$, а точки M_1 и M_2 опредѣляемыя. Предполагаемъ, что при точкѣ M_1, угломѣрнымъ снарядомъ, на прим. теодолитомъ, измѣрены были углы $M_2M_1A = \alpha_1$ и $M_2M_1B = \beta_1$, а при точкѣ M_2 углы $IM_2A = \alpha_2$ и $IM_2B = \beta_2$, гдѣ α_2 и β_2 суть дополненія до 180° угловъ AM_2M_1 и BM_2M_1. Изобразимъ разстоянія точекъ B, M_1 и M_2 отъ A чрезъ K, k_1 и k_2, а дирекціональные углы сихъ линій при точкѣ A чрезъ Z, z_1 и z_2. Здѣсь величины K и Z предполагаемъ извѣстными, ибо еслибы онѣ были неизвѣстны, то онѣ опредѣлились бы на основаніи § 402. Для опредѣленія координатъ y_1, x_1 и y_2, x_2 точекъ M_1, M_2, найдемъ сперва z_1, k_1 и z_2, k_2.

Треуг-ки ABM_1, ABM_2 и AM_2M_1, даютъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin(\beta_1-\alpha_1)}{K}&=\frac{\sin(\beta_1-\alpha_1+z_1-Z)}{k_1}\\ \frac{\sin(\beta_2-\alpha_2+z_2-Z)}{k_2}&=\frac{\sin(\beta_2-\alpha_2)}{K}\\ \frac{\sin\alpha_2}{k_1}&=\frac{\sin\alpha_1}{k_2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

по перемноженіи сихъ уравненій, получимъ

$$\sin\alpha_2.\sin(\beta_1-\alpha_1)\sin(\beta_2-\alpha_2+z_2-Z)=$$
$$\sin\alpha_1.\sin(\beta_2-\alpha_2).\sin(\beta_1'-\alpha_1+z_1-Z,),$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha_2\sin(\beta_1-\alpha_1)}{\sin\alpha_1\sin(\beta_2-\alpha_2)}=\frac{\sin(\beta_1-\alpha_1+z_1-Z)}{\sin(\beta_2-\alpha_2+z_2-Z)}\ldots\ldots (10)$$

Но въ треуг-кѣ AM_1M_2, уг. M_2AM_1 или $z_2-z_1=\alpha_2-\alpha_1$ и если положимъ. . . . . $z_2+z_1=2S$,

то получимъ $$\left.\begin{aligned} z_1 &= S - \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ z_2 &= S + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Эти величины z_1 и z_2 будучи подставлены въ выраженія угловъ, входящихъ во 2-ю часть уравненія (10), даютъ

$$\beta_1 - \alpha_1 + z_1 - Z = \beta_1 - \alpha_1 + S - \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) - Z,$$
$$\beta_2 - \alpha_2 + z_2 - Z = \beta_2 - \alpha_2 + S + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) - Z,$$

и если положимъ $$\left.\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 - \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) &= m + n \\ \beta_2 - \alpha_2 + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) &= m - n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (12),$$

то предшествующія уравненія обратятся въ

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 + z_1 - Z &= S - Z + m + n = H + n \\ \beta_2 - \alpha_2 + z_2 - Z &= S - Z + m - n = H - n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (13)$$

гдѣ для сокращенія полагаемъ

$$H = S - Z + m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Подставя выраженія (13) въ урав. (10) и приравнявъ 1-ю его часть тангенсу вспомогательной дуги ψ, т. е.

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin\alpha_2 \sin(\beta_1 - \alpha_1)}{\sin\alpha_1 \sin(\beta_2 - \alpha_2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

получимъ $$\operatorname{tang}\psi = \frac{\sin(H+n)}{\sin(H-n)} \text{ или } \frac{1}{\operatorname{tang}\psi} = \frac{\sin(H-n)}{\sin(H+n)},$$

откуда $$\frac{1+\operatorname{tang}\psi}{1-\operatorname{tang}\psi} = \frac{\sin(H-n)+\sin(H+n)}{\sin(H-n)-\sin(H+n)},$$

что по формуламъ (8) и (15) ч. I стр. 3 и 4, обращается въ

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\psi) = -\frac{\operatorname{tang}H}{\operatorname{tang}n}$$

и слѣд. $$\operatorname{tang}H = -\operatorname{tang}n \,.\, \operatorname{tang}(45^\circ+\psi) \ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Здѣсь n извѣстно, ибо разность уравненій (12), будетъ

$$n = \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Такимъ образомъ опредѣливъ изъ сего послѣдняго уравненія величину n, а потомъ вспомогательную дугу ψ изъ урав. (15), рѣшатъ урав. (16); послѣ чего искомая длина линій $AM_1 = k_1$ и $AM_2 = k_2$, найдется изъ двухъ первыхъ уравне-

ній (9), которыя отъ подстановки выраженій (13), обратятся въ

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= K\,\frac{\sin(H+n)}{\sin(\beta_1-\alpha_1)} \\ k_2 &= K.\frac{\sin(H-n)}{\sin(\beta_2-\alpha_2)} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Для опредѣленія же дирекціональныхъ угловъ z_1 и z_2 возьмемъ выраженія (11) и подставимъ въ нихъ величину $H+Z-m$ вмѣсто S (изъ урав. 14):

$$z_1 = Z + H - m - \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1),$$
$$z_2 = Z + H - m + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1);$$

но какъ изъ уравненій (12) имѣемъ

$$m = \beta_1 - \alpha_1 - \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) - n,$$
$$m = \beta_2 - \alpha_2 + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + n,$$

то внеся сіи величины въ предшествующія, по сокращеніи получимъ

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= Z + H + n - (\beta_1 - \alpha_1) \\ z_2 &= Z + H - n - (\beta_2 - \alpha_2) \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Когда же найдутся какъ k_1 и k_2, такъ и z_1 и z_2, тогда искомыя координаты y_1, x_1 и y_2, x_2 точекъ M_1 и M_2 опредѣлятся уравненіями:

$$y_1 = y + k_1 \sin z_1, \qquad x_1 = x + k_1 \cos z_1,$$
$$y_2 = y + k_2 \sin z_2, \qquad x_2 = x + k_2 \cos z_2.$$

Еслибы пожелали опредѣлить длину разстоянія $M_1M_2 = d$ между точками M_1 и M_2, то оно получилось бы по одному изъ слѣдующихъ двухъ уравненій, доставляемыхъ треугольникомъ AM_1M_2:

$$\left.\begin{aligned} d &= k_1\,\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\sin\alpha_2} \\ d &= k_2\,\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}{\sin\alpha_1} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (20).$$

§ 405. Въ заключеніе присовокупимъ нѣкоторыя практическія замѣчанія касательно рѣшенія сей задачи:

1-е) Изъ двухъ опредѣляемыхъ точекъ, должно означать буквою M_1, ту изъ нихъ, которая лежитъ влѣво, (предполагая что мы смотримъ изъ центра фигуры), а лежащую отъ ней вправо буквою M_2. Изъ двухъ же данныхъ должно принимать за главную A, (т. е. при коей слѣдуетъ опредѣлять дирекціональные углы и отъ коей надобно считать разстоянія k_1 и k_2) ту, которая лежитъ вправо отъ точки M_2.

2-е) Для доставленія возможности всѣ выше выведенныя формулы примѣнять ко всѣмъ случаямъ безъ исключенія, должно принять за постоянное правило подъ α_1 и β_1 разумѣть углы, считаемые отъ линіи M_1M_2 вправо до 360°; по сей причинѣ, если при визированіи изъ точки M_1 трубою теодолита на точку M_2, нуль верньера находился на нулѣ лимба, то α_1 и β_1 выразятъ отсчитыванія на лимбѣ при визированіи на точки A и B. Такимъ же образомъ, подъ α_2 и β_2 должно разумѣть величину угловъ, считаемыхъ при точкѣ M_2 отъ продолженія линіи M_1M_2 вправо, или что все равно отсчитыванія на лимбѣ при визированіи на точку A и B въ томъ случаѣ, если при визированіи на точку M_1 верньеръ находился на 180° градусной подписи. Въ слѣдствіе чего, еслибы нуль верньера не находился на нулѣ лимба при визированіи изъ M_1 на M_2, или на 180° при визированіи изъ M_2 на M_1, то во избѣжаніе сбивчивости вычисленія, будетъ полезно привести всѣ отсчитыванія къ тѣмъ, какія бы получились, еслибы наблюденія сдѣланы были при этихъ условіяхъ. Такъ на прим. если на точкѣ M_2, при визированіи на точки M_1, A и B записаны были отсчитыванія 145° 30′ 10″, 17° 0′ 50″ и 105° 30′ 40″, то вычтя 145° 30′ 10″ изъ 180°, разность 34° 29′ 50″ приложимъ къ двумъ послѣднимъ и получимъ $\alpha_2 = 51° 30' 40''$ и $\beta_2 = 140° 0' 30''$.

3-е) Если одна изъ опредѣляемыхъ точекъ лежала по одну сторону прямой AB, а другая по другую ея сторону, какъ представлено на чер. 219, то слѣдуя принятому условію уг. β_1 будетъ $>180°$. Въ семъ случаѣ $\beta_1 - \alpha_1$, получится болѣе 180°, и потому синусъ его будетъ со знакомъ —, также какъ и вспомогательная дуга ψ, которую не должно забывать вводить съ тѣмъ же самымъ знакомъ въ урав. (16).

4-е) Еслибы одна изъ определяемыхъ точекъ, на прим. M_1, находилась на прямой линіи соединяющей обѣ данныя, тогда $Z = z_1$ и $\beta_1 - \alpha_1 = 180°$. Такъ какъ въ семъ случаѣ $H + n$ будетъ равно $180°$ (см. урав. 13), то первое изъ уравненій (18) обратится въ $k_1 = \frac{0}{0}$. Для опредѣленія величины k_1, раздѣлимъ уравненія (20) одно на другое и получимъ

$$k_1 = k_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1},$$

гдѣ вмѣсто k_2 надобно подставлять величину опредѣляемую вторымъ изъ уравненій (18).

Объяснимъ все вышеизложенное примѣромъ:

Пусть координаты данныхъ точекъ A и B будутъ (чер. 219).

$$y = -1341{,}53, \quad x = +310{,}57$$
$$y' = -1198{,}31, \quad x' = -313{,}34;$$

при измѣреніи же угловъ записаны были отсчитыванія на точкѣ M_1 при визированіи

На	точку	M_2	.......5° 31′ 54″,
»	»	A	.......74. 3. 48,
»	»	B	......279. 12. 12;

а на точкѣ M_2 при визированіи

На	точку	A	.......77° 55′ 18″,
»	»	M_1	.....117. 1. 30,
»	»	B	......155. 56. 30.

На основаніи 2-го правила вычитаемъ 5° 31′ 54″ изъ 1-хъ трехъ отсчитываній, а къ тремъ послѣднимъ прикладываемъ 62° 58′ 30″, и получимъ

$$\alpha_1 = 68° 31' 54'', \quad \beta_1 = 273° 40' 18''$$
$$\alpha_2 = 140.\ 53.\ 48, \quad \beta_2 = 218.\ 55.\ 0;$$

отсюда имѣемъ

$$\beta_1 - \alpha_1 = 205° 8' 24'', \beta_2 - \alpha_2 = 78° 1' 12'', n = \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) = 27° 22' 39''.$$

По формуламъ же § 402, получимъ $\log K = 2.80627$, $Z = 167° 4' 17''$.

Вотъ ходъ остальнаго вычисленія:

$\sin\alpha_2$....9.79984	$\tang n$....9.71421—	$H=164°14'\ 4''$
$\sin(\beta_1-\alpha_1)$....9.62822—	$tg(45°+\psi)$...9.73654	$n=\ 27.22.39$
доп. $\sin\alpha_1$....0.03123	$\tang H$....9.45075—	$H+n=191.36.43$
доп. $\sin(\beta_2-\alpha_2)$..0.00956	$H=164°14'\ 4''$	$H-n=136.51.25$
$\tang\psi$....9.46885—	$Z=167°\ 4'17''$..........	..$167°\ 4'17''$
$\psi=-16°24'5''$	$H+n=191.36.43$	$H-n=136.51.25$
$45°+\psi=28.35.55$	$\beta_1-\alpha_1=-205.\ 8.24$	$\beta_2-\alpha_2=-\ 78.\ 1.12$
	$z_1=153.32.36$	$z_2=225.54.30$

K....2.80627		K....2.80627	
$\sin(H+n)$....9.30380—		$\sin(H-n)$..9.83494	
доп. $\sin(\beta_1-\alpha_1)$.0.37178—		доп. $\sin(\beta_2-\alpha_2)$.0.00956	
k_1...2.48185+		k_2....2.65077	
$\sin z_1$....9.64887	$y=-1341{,}53$	$\sin z_2$.9.85626—	$y=-1341{,}53$
2.13072......	$+135{,}12$	2.50703—......	$-321{,}39$
	$y_1=-1206{,}41$		$y_2=-1662{,}92$
k_1....2.48185		k_2....2.65077	
$\cos z_1$....9.95196—	$x=+310{,}57$	$\cos z_2$.9.84249—	$x=+310{,}57$
2.43381—....	$-271{,}53$	2.49326—......	$-311{,}36$
	$x_1=+39{,}04$		$x_2=-\ 0{,}79$

B.) СФЕРИЧЕСКІЯ КООРДИНАТЫ.

§ 406. Пусть A (чер. 216) будетъ главная точка сѣти, т. е. принимаемая за начало осей, P полюсъ земли, PAX главный меридіанъ и M, M′, какія либо двѣ послѣдовательныя точки треангуляціи, соединяемыя одна съ другою бокомъ MM′=K, выраженнымъ въ линейной мѣрѣ. Перпендикулярныя дуги MQ=y, M′Q′=y', опущенныя изъ сихъ точекъ на меридіанъ PAX, принимаемъ за ординаты, а разстоянія подошвъ ихъ отъ главной точки, т. е. AQ=x, AQ′=x', за абсциссы. Дуги MQ и M′Q′ можно принимать находящимися на сферѣ, коей радіусъ есть нормаль при точкѣ Q. Эти дуги будучи продолжены на сей сферѣ пересѣкутся въ точкѣ O, которая есть полюсъ меридіана PA. Уголъ OMM′, образуемый бокомъ MM′ тригонометрической сѣти и дугою перпендикуляра OMQ, условимся называть *позиціоннымъ угломъ* или *угломъ положенія* и считать его отъ востока чрезъ сѣверъ до 360°.

Такъ какъ координаты точекъ и углы положенiй вычисляются послѣдовательно одни послѣ другихъ, то примемъ координаты $MQ=y$, $AQ=x$, какой либо точки M, также какъ и уголъ положенiя $OMM'=\beta$ бока MM' извѣстными, и займемся опредѣленiемъ координатъ $Q'M'=y'$, $AQ'=x'$ точки M'.

Рѣшенiе этого вопроса заключается въ опредѣленiи изъ сфер. треуг-ка $MM'O$ по двумъ бокамъ $MM'=K$, $MO=90°-y$, и заключающемуся углу $M'MO=\beta$, прочихъ трехъ частей, именно: бока $M'O=90°-y'$ и угловъ MOM' и $MM'O$, изъ коихъ первый служитъ мѣрою дуги $QQ'=x'-x$, а вторый угломъ дополнительнымъ до 360° позицiоннаго угла β' бока MM' при точкѣ M'. Послѣ чего искомыя координаты точки M' будутъ $y'=90°-M'O$, $x'=x+QQ'$, а позицiонный уголъ $\beta'=360°-MM'O$.

Но какъ въ семъ треуг-кѣ $MM'O$ бокъ MM' и уг. O весьма малы въ сравненiи съ другими двумя его боками, то при рѣшенiи его встрѣчается тотъ же самый случай, какой былъ нами размотрѣнъ въ предшествующей главѣ (см. § 384), а потому для опредѣленiя искомыхъ частей, достаточно въ выведенныя тамъ формулы (A) стр. 4, (B^{IV}) стр. 13 и (C'') стр 15,
вмѣсто. . . . a, z, l, $d=l-l'$, P и z'
подставить K, β, y, $y'-y$, $O=x'-x$ и β'.

Сверхъ того, такъ какъ въ вышесказанныхъ формулахъ a, d и P выражали секунды дуги, а въ разсматриваемомъ нами случаѣ K, y', y, x' и x, выражаютъ длины дугъ въ линейной мѣрѣ, то необходимо вмѣсто a, d и P подставлять не K, $y'-y$ и $x'-x$, но $\frac{K}{N\sin 1''}$, $\frac{y'-y}{N\sin 1''}$ и $\frac{x'-x}{N\sin 1''}$. Исполнивъ это и отбрасывая члены высшихъ порядковъ, по сокращенiи получимъ

$$\left.\begin{aligned} y' &= y + K\cos\beta - \tfrac{1}{2}\frac{K^2}{N}\tang y\sin^2\beta - \tfrac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\cos\beta\sin^2\beta \\ x' &= x + \frac{K\sin\beta}{\cos y} + \frac{K^2}{N}\,\frac{\sin\beta.\cos\beta.\mathrm{tg}\,y}{\cos y} + \frac{K^3}{3N^2}\,\frac{\sin\beta.\cos^2\beta}{\cos y} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (21)$$

$$\beta' = 180° + \beta + \frac{K\sin\beta.\tang y}{N\sin 1''} + \frac{K^2\sin\beta\cos\beta}{2N^2\sin 1''}\ldots\ldots\ldots\ldots (22).$$

Въ большей части случаевъ, можно отбрасывать послѣдніе члены сихъ формулъ, по ихъ незначительности. Знакъ предъ y' означитъ по какую сторону точка M' лежитъ отъ меридіана, а знакъ предъ x' отъ главнаго перпендикуляра.

§ 407. Касательно самаго вычисленія координатъ, должно замѣтить слѣдующее:

Для главной точки A, принимаемой за начало осей, координаты y и x равны нулю, а позиціонный уголъ β равенъ $90°—z$, гдѣ z есть азимутъ бока. Введя сіи условія въ наши формулы, получимъ дя точки M, соединяющейся посредствомъ бока треангуляціи съ главною точкою A, слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} y' &= K\sin z - \frac{K^3}{6N^2}\sin z\cos^2 z \\ x' &= K\cos z + \frac{K^3}{3N^2}\cos z\sin^2 z \\ \beta_1 &= 270° - z + \frac{K^2\sin z\cos z}{2N^2\sin 1''} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

2-е) По опредѣленіи позиціоннаго угла β_1 при точкѣ M линіи AM, позиціонный уголъ послѣдующаго бока MM', будетъ $\beta = \beta_1 \pm M$, гдѣ M означаетъ величину угла образуемаго боками MM' и AM триг. сѣти. Его должно вводить со знакомъ $+$ если онъ лежитъ по лѣвую, а со знакомъ — по правую сторону наблюдателя, стоящаго въ вершинѣ угла и обращеннаго лицемъ къ предшествующей точкѣ. Если сумма $\beta_1 + M$ окажется болѣе 360°, то должно вычитать изъ нѐй 360°.

3-е) Такъ какъ величина нормали N зависитъ отъ широты мѣста, а широты точекъ при вычисленіи координатъ предполагаемъ неизвѣстными, (ибо онѣ вычисляются послѣ координатъ по формуламъ послѣдующей главы), то полезно вычислить предварительно таблицу нормалей, аргументомъ коей служили бы абсциссы x. Хотя въ строгомъ смыслѣ, точки M и Q не имѣютъ одной и той же широты, и потому нормаль при точкѣ M не одинакова съ нормалью точки Q, однакоже въ разсматриваемомъ нами случаѣ не можетъ отъ того произойдти никакой погрѣшности при вычисленіи фор-

мулъ (21) и (22), ибо члены, въ которые входитъ N вычисляются съ 5-ю и даже съ 4-мя десятичными знаками. Самое же вычисленіе таблицы нормалей не затруднительно, ибо какъ широта точки A съ строгою точностію бываетъ извѣстна, то достаточно послѣдовательно принимать абсциссы равными 5000, 10000, 15000,.... саженямъ, и обративъ эти дуги меридіановъ въ секунды, прикладывать къ широтѣ точки A или вычитать изъ ней, и найдя такимъ образомъ широту оконечностей сихъ дугъ, вычислять потомъ нормали по извѣстнымъ формуламъ.

4-е) Прежде чѣмъ приступятъ къ вычисленію уравненій (21) и (22) надобно раздѣлить y на $N \sin 1''$; частное выразитъ угловую величину ординаты и доставитъ возможность приискать въ таблицахъ $\cos y$ и $\tang y$, входящіе въ упомянутыя уравненія. Впрочемъ дѣйствіе будетъ малосложнѣе, если сдѣлаемъ преобразованія въ формулахъ, подставя вмѣсто $\cos y$ и $\tang y$ ихъ величины выраженныя рядами $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2N^2}$, $\operatorname{tg} y = \frac{y}{N} + \frac{y^3}{3N^3}$; и отбрасывая члены 4-го порядка. Такимъ образомъ найдемъ

$$y' = y + K\cos\beta - \frac{K^2 y}{2N^2}\sin^2\beta - \frac{K^3}{6N^2}\cos\beta\sin^2\beta,$$

$$x' = x + K\sin\beta + \frac{K y^2}{2N^2}\sin\beta + \frac{K^2 y}{N^2}\sin\beta\cos\beta + \frac{K^3}{3N^2}\sin\beta\cos^2\beta,$$

$$\beta' = 180^\circ + \beta + \frac{K y \sin\beta}{N^2 \sin 1''} + \frac{K^2}{2N^2}\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin 1''};$$

или для краткости положивъ $K\cos\beta = b$, $K\sin\beta = a$, эти уравненія обратятся въ слѣдующія:

$$y' = y + b - \frac{a^2 y}{2N^2} - \frac{a^2 b}{6N^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

$$x' = x + a + \frac{a y^2}{2N^2} + \frac{a b y}{N^2} + \frac{a b^2}{3N^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\beta' = 180^\circ + \beta + \frac{a y}{N^2 \sin 1''} + \frac{a b}{2N^2 \sin 1''} \ldots\ldots\ldots (26).$$

Вычисленіе абсциссы x' еще болѣе сократится, если въ урав. (25) вмѣсто y подставимъ приближенную ея величину

$y'-b$, получаемую изъ уравненія (24), ибо тогда урав. (25) обратится въ

$$x'=x+a+\frac{a^2(y'-b)^2}{2N^2}+\frac{ab(y'-b)}{N^2}+\frac{ab^2}{3N^2};$$

развернувъ скобки, по сокращеніи, получимъ

$$x'=x+a+\frac{ay'^2}{2N^2}-\frac{ab^2}{6N^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27).$$

Объяснимъ примѣромъ: пусть координаты точки M будутъ $y=+27246{,}38$, $x=-74142{,}77$; позиціонный уг. $\beta=312^\circ\,27'\,18'',00$; $\log K=4.4078478$; приближенная широта точки M или $l=58^\circ\,31'\,0''$; слѣд. нормаль для сей широты будетъ $\log N=6.4765951$; отсюда доп. $\log(2N^2)=\overline{14}.74578$ доп. $\log(6N^2)=\overline{14}.26866$.

Вычисленіе урав. (24) и (27).

$K\ldots4.4078478$	$K\ldots4.4078478$; $x=-74142{,}77$
$\cos\beta\ldots9.8300553$ $y=+27246{,}38$	$\sin\beta\ldots9.8673180-$
$b\ldots4.2379031\ldots b=+17294{,}30$	$a\ldots4.2751658-\ldots-18843{,}68$
$a^2\ldots8.5503-$	$y'^2\ldots9.2970$
доп.$(6N^2)$. $\overline{14}.2687$	доп.$(2N^2)$. $\overline{14}.7458$
$\overline{1}.0569-\ldots$ 4-й чл. $=-0{,}11$	3-й чл. $\ldots0.3180-\ldots\ldots-2{,}08$
$a^2\ldots8.5503-$	$a\ldots4.2752-$
$y\ldots4.4353$	$b^2\ldots8.4758-$
доп.$(2N^2)$. $\overline{14}.7458$	доп.$(6N^2)$. $\overline{14}.2687$
$\overline{1}.7314-\ldots$ 3-й чл. $=-0{,}54$	4-й чл. $\ldots\overline{1}.0197+\ldots\ldots+0{,}10$
$y'=44540{,}03$	$x'=-92986{,}43$
$\log y'=4.6485005$	

Вычисленіе урав. (26)

$a\ldots4.27516-$	
$y\ldots4.43531$	$180^\circ\ 0'\ 0''$
доп.$(N^2\sin 1'')\ldots\overline{8}.36107$	$\beta=+312.\ 27.\ 18{,}00$
3-й чл. $\ldots1.07154-\ldots\ldots\ldots$	$-\ 0.\ 0.\ 11{,}79$
$a\ldots4.27516-$	
$b\ldots4.23790$	
доп.$(2N^2\sin 1'')\ldots\overline{8}.06023$	
4-й чл. $\ldots0.57329-\ldots\ldots\ldots$	$-\ 0.\ 0.\ 3{,}74$
	$\beta'=132.\ 27.\ 2{,}47$

§ 408. Изложенный нами теперь способъ вычисленія позиціоннаго угла и координатъ принятъ въ Баваріи. Онъ проще и удобнѣе способа предложеннаго Лежандромъ, ибо слѣдуя сему послѣднему надобно сперва вычислить широту и долготу точекъ сѣти, также какъ и азимуты боковъ треугольниковъ, по формуламъ, предложеннымъ въ предшествующей главѣ; потомъ изъ сферич-го прямоуг-го треуг-ка QMP (чер. 214) по даннымъ $PM=90°-l$ и углу $QPM=P$, найдти величину угла $QMP=\psi$ по формулѣ

$$\cot\psi=\sin l.\tang P \dots\dots\dots\dots (28).$$

По опредѣленіи отсюда угла ψ, искомый позиціонный уголъ $M'MO=\beta$ будетъ

$$\beta=180°-(\psi+z) \dots\dots\dots\dots (29)$$

гдѣ z означаетъ данный азимутъ PMM' бока MM', считаемый отъ сѣвера къ востоку до 360°. Величину этого угла β вводятъ потомъ въ формулы (21) съ тѣмъ самымъ знакомъ, какой получится изъ уравненія; такъ на прим. если $\psi+z>180°$ и $<270°$, то уг. β будетъ $<90°$, но со знакомъ —, и тогда $\cos\beta$ будетъ съ +, а $\sin\beta$ съ —. Далѣе очевидно, что если точка M лежитъ къ западу отъ меридіана, тогда уг. P, а слѣд. и $\tang P$ будетъ отрицательный, а урав. (28) дастъ для ψ дугу, служащую дополненіемъ до 180° угла треуг-ка QMP.

Для вычисленія координатъ по формуламъ (21), какъ уже упомянуто выше, необходимо сперва обратить ординату y въ секунды чрезъ дѣленіе ея длины на $N\sin 1''$; но какъ слѣдуя способу Лежандра, широта и долгота точекъ сѣти предварительно вычисляется, то угловую величину ординаты можно также найдти изъ прямоуг. сфер-го треуг-ка QMP, который даетъ

$$\sin y=\cos l.\sin P \dots\dots\dots\dots (30)$$

Когда y и P весьма малы, тогда будетъ удобнѣе въ уравненіяхъ (28) и (30) вмѣсто $\tang P$, $\sin P$, $\sin y$ и $\cot\psi=\tang(90°-\psi)$ подставить ихъ дуги, т. е. $P\sin 1''$, $y\sin 1''$ и $(90°-\psi)\sin 1''$, чрезъ что получимъ

$$\psi=90°-P\sin l \dots\dots\dots\dots (31)$$

$$y=P\sin l \dots\dots\dots\dots (32).$$

§ 409. Въ заключеніе присовокупимъ, что вычисленіе позиціоннаго угла по одному изъ вышеизложенныхъ нами способовъ (§ 407 и 408) а потомъ координатъ, относится лишь до точекъ 1-го разряда; при вычисленіи же координатъ точекъ 2-го и 3-го разрядовъ, нѣтъ надобности принимать во вниманіе сферическій видъ земли, или что все равно, достаточно принимать перпендикуляры къ меридіану за прямыя между собою параллельныя. Такимъ образомъ, если M (чер. 217) есть точка 1-го разряда, коей координаты суть y и x, а M' точка 2-го разряда и уголъ положенія $M'MO=\beta$, то отбрасывая въ формулахъ (24) и (27) всѣ члены высшихъ порядковъ, получимъ для координатъ ея

$$y'=y+K\cos\beta,\quad x'=x+K\sin\beta,$$

а урав. (26) обратится въ

$$\beta'=180^\circ+\beta;$$

послѣ чего опредѣливъ величину позиціоннаго угла послѣдующаго бока $M'B$ или $M'B'$ изъ уравненія

$$\beta_1=\beta'\pm M',$$

гдѣ M' есть уг. $BM'M$ или $B'M'M$, внесутъ потомъ величину угла β_1 вмѣсто β въ выраженія y' и x'

c.) СПОСОБЪ ГЕНЕРАЛА ШУБЕРТА.

§ 410. Пусть A (чер. 212) будетъ главная точка, Ap и AO главный меридіанъ и главный перпендикуляръ, M и M' двѣ послѣдовательныя точки сѣти, соединяемыя одна съ другою бокомъ MM' выраженнымъ въ саженяхъ. Если примемъ землю за сферу, то перпендикулярныя дуги MQ, $M'Q'$, опущенныя изъ M, M', на меридіанъ Ap, будучи продолжены пересѣкутся въ точкѣ O, служащей его полюсомъ, а дуги MG, $M'G'$, проведенныя подъ прямымъ угломъ къ главному перпендикуляру AO, пересѣкутся въ точкѣ p, которая будетъ полюсомъ сего послѣдняго. Дуги Mp, $M'p$, какъ уже намъ извѣстно (см. § 398) называются *дирекціональными линіями,* а углы ими составляемые съ боками сѣти, на прим. pMM', *дирекціональными углами.* Требуется для каждой точки сѣти,

опредѣлить соотвѣтствующія имъ координаты, считаемыя по главнымъ осямъ и заключающіяся между главною точкою и подошвами перпендикулярно на нихъ опущенныхъ дугъ.

Для точки M, соединяющейся съ началомъ осей бокомъ AM сѣти, координаты $AG=Y$, $AQ=X$, найдутся изъ рѣшенія косоугольныхъ сфер. треуг-въ AMp и AMO, изъ коихъ въ 1-мъ по извѣстнымъ бокамъ AM, $Ap=90°$ и углу MAp, изображающему азимутъ z бока AM, опредѣлится уг. ApM, служащій мѣрою дуги $AG=Y$; а во 2-мъ, т. е. въ треуг-кѣ AMO по даннымъ бокамъ AM, $AO=90°$ и углу $MAO=90°-z$, получимъ уг. MOA, измѣряющій дугу $AQ=X$.

Для опредѣленія же координатъ слѣдующей точки M', т. е. $Y'=AG'=Y+GG'$ и $X'=AQ'=X+QQ'$, нужно сперва найдти длину дугъ MG и MQ, а потомъ величину угловъ $M'Mp=\alpha$ и $M'MO=\beta$; ибо коль скоро какъ тѣ, такъ и другія сдѣлаются извѣстными, тогда возможно будетъ рѣшить сфер. косоугольные треуг-ки $MM'p$ и $MM'O$, (по даннымъ двумъ бокамъ и заключающемуся углу) и вывесть изъ нихъ величину угловъ $MpM'=GG'$ и $MOM'=QQ'$.

Вышесказанныя дуги MG и MQ опредѣляются непосредственно изъ прямоуг-хъ сфер. треуг-въ MQp и MGO, изъ коихъ въ 1-мъ извѣстныя части суть: $Qp=90°-X$, и уг. $QpM=Y$, а во 2-мъ: $GO=90°-Y$, и уг. $GOM=X$.

Для опредѣленія же угла α, нужно сперва изъ треуг-ка AMp найдти уг. M; послѣ того по извѣстному углу AMM', образуемому боками сѣти, уг. $pMM'=\alpha$ найдется чрезъ простое вычитаніе. Наконецъ изъ треуг-ка MQp, найдя уг. $QMp=\psi$, получатъ уг. $M'MO=\beta=180°-(\psi+\alpha)$ (*).

(*) Подробное изложеніе способа Генерала Шуберта со всѣми формулами и примѣрами вычисленій помѣщено въ VII части записокъ Военно-Топогр. Депо. Мы не считаемъ за нужное распространяться болѣе о семъ предметѣ, потому что при производствѣ геодез. дѣйствій у насъ въ Россіи координаты точекъ нынѣ болѣе не вычисляются по способу Ген. Шуберта по многосложности дѣйствія.

D.) ПОЛЯРНЫЯ КООРДИНАТЫ.

§ 411. Способъ полярныхъ координатъ, предложенный Бесселемъ, (см. Astron. Nachrichten, B. I, № 3), какъ упомянуто выше (см. § 400), состоитъ въ опредѣленіи длины дугъ, соединяющихъ главную точку A (чер. 213) со всѣми точками M, M′, M″..... сѣти, равно какъ и азимутовъ этихъ дугъ AM, AM′, AM″..... при точкѣ A. Это достигается изъ непосредственнаго рѣшенія сфер. треуг-въ малаго изгиба по способу Лежандра (§ 147). И въ самомъ дѣлѣ, положивъ азимутъ PAM$=z$ (считаемый отъ сѣвера къ востоку до 360°), извѣстнымъ изъ астрономическихъ наблюденій, для опредѣленія длины дуги AM′ и ея азимута M′AP$=z'$, надобно только рѣшить треуг. AMM′, въ коемъ извѣстныя части суть бока AM, MM′ и заключающійся между ними уг. AM̂M′; посему опредѣливъ сфер. избытокъ ε сего треугольника и вычтя треть онаго изъ угла M, разность $M-\frac{1}{3}\varepsilon$ изобразитъ величину соотвѣтствующаго угла распрямленнаго треуг-ка; потомъ рѣшивъ сей послѣдній по общимъ правиламъ Прям. Тригон., получатъ длину искомой дуги AM′ и величину другихъ угловъ сего треуг-ка. Приложивъ же $\frac{1}{3}\varepsilon$ къ каждому изъ нихъ, найдутъ точную величину сфер. угловъ M′AM и AM′M. Искомый азимутъ PAM′$=z'$ очевидно будетъ $=z-$M′AM.

Послѣ сего переходятъ къ слѣдующей точкѣ M″: поелику въ сфер. треуг-кѣ AM′M″ малаго изгиба извѣстны также три части, а именно: найденная длина дуги AM′, бокъ M′M″ и уг. AM′M″$=$MM′M″$\pm$AM′M, (смотря потому по правую ли, или по лѣвую сторону дуги AM′ находится треуг. AM′M″), то получимъ возможность съ симъ треуг-мъ поступить по вышесказанному и посему опредѣлить дугу AM″, уг. M″AP и M′M″A, а потомъ перейдти къ слѣдующей точкѣ, и т. д.

§ 412. Для выраженія вышеизложеннаго аналитически изобразимъ длину послѣдовательныхъ боковъ триг. сѣти чрезъ K, K′, K″.....; длину дугъ соединяющихъ точки M, M′, M″... съ главною точкою A чрезъ S, S′, S″..... (здѣсь S$=$K), азимуты сихъ дугъ при точкѣ A чрезъ z, z', z''.....; углы AMM′, MM′M″..... образуемые боками триг. сѣти чрезъ

$\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$, и наконецъ сфер. углы, составляемые дугами S' съ K', S'' съ $K''\ldots$ чрезъ $\gamma', \gamma'', \gamma'''\ldots$ Для 1-го треуг-ка AMM' вычтя треть его сфер. избытка $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{SK'\sin\alpha}{R^2\sin 1''}$ изъ угла $M=\alpha$, разность $\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon$ выразитъ величину угла распрямленнаго треуг-ка; примѣнивъ же къ нему извѣстную теорему тангенсовъ (ч. I, стр. 7 урав. 29), получимъ

$$\tang\tfrac{1}{2}(MM'A - M'AM) = \frac{S - K'}{S + K'}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon);$$

но въ разсматриваемомъ нами треуг-кѣ, уг. $MM'A = \gamma' - \frac{1}{3}\varepsilon$, а уг. $M'AM = z - z' - \frac{1}{3}\varepsilon$; слѣд. по внесеніи сихъ величинъ, будетъ

$$\tang\tfrac{1}{2}(\gamma' - z + z') = \frac{S - K'}{S + K'}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon)\ldots\ldots(33).$$

Это урав. даетъ намъ полу-разность искомыхъ сферич. угловъ, т. е. $\frac{1}{2}(\gamma' - z + z') = n$; полу-сумма же оныхъ будетъ

$$\tfrac{1}{2}(\gamma' + z - z') = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\varepsilon = m;$$

послѣ чего получимъ

$$\gamma' = m + n,\ z - z' = m - n,\ \text{откуда}\ z' = z - (m - n).$$

Наконецъ искомая дуга S', будетъ

$$S' = \frac{S.\sin(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin(\gamma' - \frac{1}{3}\varepsilon)} = \frac{K'\sin(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin(z - z' - \frac{1}{3}\varepsilon)}\ldots\ldots\ldots(34)$$

Такимъ же образомъ для треуг-ка $AM'M''$ найдемъ, что сферич. его избытокъ $\varepsilon' = \frac{S'K''\sin(\alpha' - \gamma')}{2R^2\sin 1''}$, а урав. (33) обратится въ

$$\tang\tfrac{1}{2}(\gamma'' - z' + z'') = \frac{S' - K''}{S' + K''}.\tang\tfrac{1}{2}(\alpha' - \gamma' - \tfrac{1}{3}\varepsilon');\ldots\ldots\ldots(35)$$

отсюда получимъ полу-разность n' искомыхъ сфер. угловъ

$$n' = \tfrac{1}{2}(\gamma'' - z' + z'');$$

полу-сумма же ихъ будетъ $\frac{1}{2}(\gamma'' + z' - z'') = 90^\circ - (\alpha' - \gamma') + \frac{1}{2}\varepsilon' = m'$; послѣ чего получимъ $\gamma'' = m' + n' - \frac{1}{3}\varepsilon$, и $z'' = z' - (m' - n')$, и т. д. (*).

(*) Бессель предлагаетъ полярныя координаты опредѣлять посредствомъ гауссовыхъ уравненій (ч. I, стр. 26, урав. 62) слѣдующимъ образомъ: примѣнивъ эти формулы къ треуг-ку AMM', получимъ

Къ сему должно присовокупить, что

1-е) При вычисленіи сфер. избытка ε, ε', ... каждаго изъ треуг-въ должно въ выраженіи $\dfrac{S'K''}{2R^2\sin 1''}$ вмѣсто R вводить радіусъ кривизны соотвѣтствующій дугѣ S′ при точкѣ, находящейся приближенно на ея срединѣ по форм. (12) § 169. Впрочемъ не произойдетъ чувствительной погрѣшности, если вмѣсто онаго примемъ средній пропорціональный между нормалью и радіусомъ кривизны меридіана при вышесказанной точкѣ.

2-е) Формула (35) приличествуетъ тому случаю, когда уг. $MM'M''=\alpha'$, лежитъ по правую сторону линіи MM' (глядя

$$\sin\tfrac{1}{2}S'.\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'-z+z')=\sin\tfrac{1}{2}(S-K)\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}S'.\cos\tfrac{1}{2}(\gamma'-z+z')=\sin\tfrac{1}{2}(S+K)\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S'.\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'+z-z')=\cos\tfrac{1}{2}(S-K)\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S'.\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'+z-z')=\cos\tfrac{1}{2}(S+K)\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

По опредѣленіи отсюда γ', z' и S' по даннымъ α, S и K, перейдутъ къ треуг-ку $AM'M''$, для коего будетъ

$$\sin\tfrac{1}{2}S''.\sin\tfrac{1}{2}(\gamma''-z'+z'')=\sin\tfrac{1}{2}(S'-K')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma'),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}S''.\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''-z'+z'')=\sin\tfrac{1}{2}(S'+K')\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma'),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S''.\sin\tfrac{1}{2}(\gamma''+z'-z'')=\cos\tfrac{1}{2}(S'-K')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma'),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}S''.\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''+z'-z'')=\cos\tfrac{1}{2}(S'+K')\sin\tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma'),$$ и т. д.

Такъ какъ бока K, K′, K″.... тригоном. сѣти даются въ линейной мѣрѣ, на прим. въ саженяхъ, и въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ требуется опредѣлить длину дугъ S′, S″,....; въ вышепредложенныя же формулы входитъ угловая величина какъ тѣхъ такъ и другихъ, то необходимо предварительно бока триг. сѣти обратить въ секунды, а каждую угловую величину дуги S′, S″,.... опредѣляемую формулами обратить въ сажени. Но дабы вмѣстѣ съ рѣшеніемъ треуг-въ принятъ былъ во вниманіе сфероидальный видъ земли, Бессель совѣтуетъ при дѣленіи K, K′, K″..... и при умноженіи S′, S″,..... на $R\sin 1''$, вводить вмѣсто R не средній радіусъ земли, но радіусъ кривизны, соотвѣтствующій азимуту каждой отдѣльной дуги при точкѣ находящейся на ея срединѣ (см. §§ 169, 173 и 190, 2-е).

Впрочемъ Бессель предлагая этотъ способъ вычисленія въ заключеніе говоритъ, что не произойдетъ никакой погрѣшности, если всѣ треуг-ки будутъ рѣшаемы по теоремѣ Лежандра, какъ изложено выше.

изъ M′ на M); если же бы онъ лежалъ по лѣвую сторону сей линiи, то надлежало бы въ урав. (35) вмѣсто $\cot\frac{1}{2}(\alpha-\gamma'-\frac{1}{3}\varepsilon')$ брать $\cot\frac{1}{2}(\alpha+\gamma'-\frac{1}{2}\varepsilon')$, а разность угловъ, т. е. $m'-n'$ выразила бы не $z'-z''$, но $z''-z'$, что очевидно.

3-е) Если точки сѣти весьма отдалены отъ главной, то для доставленiя дѣйствiю строжайшей точности, надобно вычислять посредствомъ логариѳмическихъ таблицъ о 8 десятичныхъ знакахъ, что составляетъ одно изъ важнѣйшихъ неудобствъ этого способа. Впрочемъ, какъ замѣчаетъ Бессель, по вычисленiи длины дуги, соединяющей главную съ одной изъ нихъ, можно при сей точкѣ опредѣлить астрономическими дѣйствiями азимутъ бока, соединяющаго сiю точку съ слѣдующею и принять ее за новое начало осей.

4-е Такъ какъ въ урав. (33) и (35) входитъ разность и сумма дугъ S и K′, или S′ и K″....; при вычисленiи же извѣстны бываютъ не длины сихъ дугъ, но ихъ логариѳмы, то во избѣжанiе могущихъ произойдти погрѣшностей отъ прискиванiя въ таблицахъ чиселъ, соотвѣтствующихъ симъ логариѳмамъ, полезно упомянутыя уравненiя преобразовать слѣдующимъ образомъ:

Раздѣливъ числителя и знаменателя выраженiя $\frac{S-K'}{S+K'}$ на K′ и положивъ $\frac{S}{K'}=\tang\varphi$, получимъ

$$\frac{S-K'}{S+K'}=\frac{\tang\varphi-1}{1+\tang\varphi}=\tang(\varphi-45^\circ);$$

послѣ чего урав. (33) обратится въ

$$\tang\tfrac{1}{2}(\gamma-z+z')=\tang(\varphi-45^\circ)\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-\tfrac{1}{3}\varepsilon),$$

выраженiе, удобное для логариѳмическихъ дѣйствiй.

§ 413. Въ заключенiе разсмотримъ какимъ образомъ по даннымъ полярнымъ координатамъ вычисляются прямоугольныя. Предположимъ, что AM=S (чер. 214) представляетъ дугу соединяющую одну изъ точекъ M сѣти съ главною точкою A, уг. PAM=z азимутъ сей дуги, MQ=y, AQ=x искомыя координаты. Онѣ опредѣлятся изъ рѣшенiя сфер. прямоуг-го треуг-ка AMQ малаго изгиба, на основанiи тео-

ремы Лежандра, именно: сперва найдутъ сфер. избытокъ сего треуг-ка по формулѣ

$$\varepsilon = \frac{S^2 \sin z . \cos z}{2R^2 \sin 1''} \text{ или } = \frac{S^2 \sin 2z}{4R^2 \sin 1''} \;(*);$$

вычтя треть сего избытка изъ угловъ $QAM=z$, $Q=90°$ и $QMA=90°-z+\varepsilon$, рѣшать его какъ прямолинейный и получать

$$y = \frac{S . \sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon)}{\sin(90°-\frac{1}{3}\varepsilon)} = \frac{S . \sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos\frac{1}{3}\varepsilon},$$

$$x = \frac{S . \sin(90° - z + \frac{2}{3}\varepsilon)}{\sin(90°-\frac{1}{3}\varepsilon)} = \frac{S . \cos(z-\frac{2}{3}\varepsilon)}{\cos\frac{1}{3}\varepsilon};$$

но какъ по малости величины $\frac{1}{3}\varepsilon$ имѣемъ $\cos\frac{1}{3}\varepsilon=1$, то

$$\left.\begin{array}{l} y = S\sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon) \\ x = S\cos(z-\frac{2}{3}\varepsilon) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Впрочемъ, если пожелаютъ вычислять y и x посредствомъ рядовъ, то достаточно будетъ разложить въ сихъ формулахъ $\sin(z-\frac{1}{3}\varepsilon)$ и $\cos(z-\frac{2}{3}\varepsilon)$ и принимая $\sin\frac{1}{3}\varepsilon=\frac{1}{3}\varepsilon\sin 1''$, $\sin\frac{2}{3}\varepsilon=\frac{2}{3}\varepsilon\sin 1''$, а $\cos\frac{1}{3}\varepsilon$ также какъ и $\cos\frac{2}{3}\varepsilon=1$, получимъ

$$y = S . \sin z - \tfrac{1}{3} S . \varepsilon \sin 1'' . \cos z,$$

$$x = S . \cos z + \tfrac{2}{3} S \varepsilon \sin 1'' \sin z;$$

подставя сюда вмѣсто ε вышепредложенную величину $\varepsilon = \frac{S^2 \sin z . \cos z}{2R^2 \sin 1''}$, по сокращеніи найдемъ

$$\left.\begin{array}{l} y = S . \sin z - \frac{1}{6} . \frac{S^3}{R^2} . \cos^2 z . \sin z \\ x = S . \cos z + \frac{1}{3} . \frac{S^3}{R^2} . \sin^2 z . \cos z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (37).$$

Эти уравненія замѣчательны по своей малосложности и строгой точности, ибо даютъ y и x выраженными въ чле-

---

(*) Въ семъ уравненіи подъ z должно разумѣть уголъ прямоуг-го треуг-ка AMQ, и потому z должно быть $<90°$. Такимъ образомъ, если азимутъ $z>90°$ и $<180°$, то вмѣсто z подставятъ $180°-z$; если же $z>180°$ и $<270°$, то изъ z вычтутъ $180°$, что очевидно.

нахъ 3-го порядка. Вмѣсто R надобно вводить длину радiуса кривизны, соотвѣтствующаго срединѣ дуги S, коей азимутъ есть z. Впрочемъ не произойдетъ чувствительной погрѣшности если вмѣсто R подставимъ среднiй радiусъ $=\sqrt{N\varrho}$, потому что члены, въ которые онъ входитъ суть 3-го порядка.

Для примѣра вычислимъ по формулѣ (37) сферическiя координаты южной оконечности градуснаго измѣренiя г. академика Струве. Принявъ дерптскую обсерваторiю за главную точку сѣти и вычисливъ полярныя координаты всѣхъ прочихъ точекъ имъ найдено было для Якобштадта: $\log S=5.0434761$ (въ тоазахъ), $z=194°\,17'\,37'',241$. Такъ какъ широта средней точки между Дерптомъ и Якобштадтомъ есть $l=57°\,26'\,25''$, то на основанiи § 190, 2-е, получимъ для этой дуги S въ тоазахъ $\log R=6.5150625$, слѣд. доп. $\log R^2=\overline{14}.9698750$. Положивъ для краткости $S\sin z=b$, $S\cos z=a$, урав. (37) обратятся въ $y=b-\frac{1}{6}\cdot\frac{ba^2}{R^2}$, $x=a+\frac{1}{3}\frac{ab^2}{R^2}$. Вотъ ходъ вычисленiя:

S....5.0434761		S....5.0434761	
$\sin z$....9.3925072—		$\cos z$....9.9863431—	
b....4.4359833—..1-й чл.=—27288,73		a....5.0298192—..107107,33	
a^2...10.05964		b^2....8.87197	
$\frac{1}{6}$....$\overline{1}$.22185—		$\frac{1}{3}$....$\overline{1}$.52288	
доп.(R²)$\overline{14}$.96987		доп.(R²).$\overline{14}$.96987	
0.68734+..2-й чл.=+	4,87	0.39454—.. —	2,48
	$y=-27283,86$		$x=-107109,81$

—

ГЛАВА III.

О вычисленіи широты и долготы точекъ сѣти посредствомъ координатъ.

§ 414. Когда координаты точекъ сѣти вычислены, тогда широта и долгота ихъ найдется посредствомъ формулъ простѣйшихъ нежели тѣ, которыя были предложены въ Гл. I. И дѣйствительно, положивъ, что P (чер. 214) есть полюсъ земли, PA главный меридіанъ, т. е. проходящій чрезъ начало A осей, M одна изъ точекъ сѣти, которой координаты $QM = y$, $AQ = x$ вычислены, λ географ. широта точки A, и l географ. широта точки Q, рѣшеніе нашего вопроса, т. е. опредѣленіе для точки M ея широты $L = 90° - PM$ и ея долготы $P =$ уг. QPM, очевидно заключается въ рѣшеніи прямоуг. сфер. треуг-ка QMP по даннымъ уг. $Q = 90°$ и бокамъ $QM = y$, $QP = 90° - (\lambda \pm u)$, означая чрезъ u амплитуду, (угловую величину) абсциссы x.

Но какъ въ предшествующей главѣ выведены были нами формулы (§§ 385 — 391), опредѣляющія части косоуг-го треуг-ка MM′P (чер. 203) по даннымъ уг. $PMM' = z$, и бокамъ $MP = 90° - l$, $MM' = a = \frac{K}{N \sin 1''}$, (гдѣ K есть линейная длина бока MM′), то для рѣшенія разсматриваемаго треуг-ка MQP (чер. 214) достаточно въ вышесказанныхъ формулахъ положить $z = 90°$ и $K = y$ или $a = \frac{y}{N \sin 1''}$. Такимъ образомъ введя эти условія въ форм. (A''') стр. 7, и въ форм. (B^{IV}) стр. 13, получимъ

$$L = l - \frac{1}{2} \frac{y^2 \tang l}{N^2 \sin 1''} (1 + e^2 \cos^2 l) \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

$$P = \frac{y}{N \sin 1'' . \cos l} - \frac{1}{2} . \frac{y^3}{N^3} . \frac{\tang^2 l}{\cos l . \sin 1''} \ldots \ldots (2).$$

Здѣсь N есть нормаль при точкѣ Q, т. е. при широтѣ l. Первая изъ сихъ двухъ формулъ, по неимѣнію въ ней членовъ высшихъ порядковъ не доставитъ требуемой степени точности въ томъ случаѣ, когда опредѣляемая точка весьма отдалена отъ главнаго меридіана, ибо тогда ордината y будетъ весьма велика. Въ слѣдствіе чего широта точекъ опредѣлится съ строжайшею точностію, если вмѣсто урав. (A‴) возьмемъ Гауссову формулу (c') (см. § 393 и 394), какъ заключающую въ себѣ члены высшихъ порядковъ. И такъ, отъ положенія $z=90°$ и $a=\frac{y}{N\sin 1''}$ урав. (a') (см. § 394) обратится въ нуль, а урав. (c') въ

$$\sigma=+\tfrac{1}{2}.\frac{y^2\tang l}{N^2.\sin 1''}\left(1-\tfrac{1}{12}\frac{y^2}{N^2}\ (1+3\tang^2 l)\right)$$

Здѣсь σ означаетъ неисправленную разность широтъ отъ сфероидальности земли, т. е. если изобразимъ неисправленную широту точки M чрезъ l', то $l'-l=-\sigma$; но какъ уже намъ извѣстно, что для исправленія сей величины отъ сфероидальности земли должно выведенную разность широтъ умножить на $\frac{N}{\varrho}$, или проще на $(1+e^2\cos^2 l)$, то искомая разность широтъ $L-l$ будетъ

$$L-l=-\tfrac{1}{2}.\frac{y^2\tang l}{N^2\sin 1''}\left[1-\tfrac{1}{12}\frac{y^2}{N^2}(1+3\tang^2 l)\right]\ (1+e^2\cos^2 l)\ldots$$

Развернувъ скобки и ограничиваясь членами 4-го порядка, получимъ

$$L=l-\tfrac{1}{2}\frac{y^2\tang l}{N^2\sin 1''}+\tfrac{1}{24}.\frac{y^4\tang l}{N^4\sin 1''}(1+3\tg^2 l)-\tfrac{1}{2}\frac{e^2y^2\tang l}{N^2\sin 1''}\cos^2 l\ldots.\ (*)$$

(*) Если для поправки отъ сфероидальности земли возьмемъ множитель $\frac{N}{\varrho}$, то вмѣсто этого урав. получимъ

$$L=l-\tfrac{1}{2}\frac{y^2\tang l}{N\varrho\sin 1''}+\tfrac{1}{24}\frac{y^4\tang l}{N^3\varrho\sin 1''}(1+3\tang^2 l)$$

Хотя эта формула малосложнѣе и точнѣе предшествующей (см. примѣч. на стр. 6), однако для вычисленія она менѣе удобна, ибо кромѣ нормали N при широтѣ l, надобно всякій разъ вычислять ϱ подъ широтою $\frac{1}{2}(l+L)$.

или $$L = l + \alpha - \tfrac{1}{12}\alpha.\frac{y^2}{N^2}(1+3\,\mathrm{tang}^2 l) + \alpha e^2 \cos^2 l \ldots (3)$$

положивъ для сокращенія $\alpha = -\frac{1}{2}\frac{y^2\,\mathrm{tang}\,l}{N^2 \sin 1''}$.

§ 415. Для опредѣленія азимута z' дуги QM (чер. 214) на горизонтѣ точки M, считаемаго отъ сѣвера къ востоку до 360°, достаточно въ форм. (C''') на стр. 15, положить $z = 90°$, и $a = \frac{y}{N \sin 1''}$; получимъ

$$z' = 270° + \frac{y\,\mathrm{tang}\,l}{N \sin 1''} - \frac{1}{6}\frac{y^3.\mathrm{tang}\,l}{N^3 \sin 1''}(1+2\,\mathrm{tang}^2 l) \ldots (4)$$

Здѣсь $z' - 270°$ выражаетъ *сближеніе меридіана* PM съ главнымъ PA, т. е. избытокъ угла PMO надъ угломъ $PQM = 90°$. Означивъ этотъ избытокъ чрезъ γ, получимъ

$$\gamma = \frac{y\,\mathrm{tang}\,l}{N \sin 1''} - \frac{1}{6}\frac{y^3\,\mathrm{tang}\,l}{N^3 \sin 1''}(1+2\,\mathrm{tang}^2 l) \ldots (5)$$

Очевидно, что для точекъ лежащихъ къ западу отъ меридіана, какъ имѣющихъ ординаты y отрицательныя, эта величина γ получится со знакомъ —, чѣмъ означится, что азимутъ z' перпендикуляра къ меридіану будетъ менѣе прямаго угла.

Съ помощію найденнаго сближенія меридіана при точкѣ M (чер. 214) легко опредѣлить при ней азимутъ какого либо бока MM' триг. сѣти, коего позиціонный уголъ извѣстенъ, ибо продоливъ ординату $QM = y$, азимутъ дуги MO будетъ $90° + \gamma$; но позиціонный уголъ $OMM' = \beta$ линіи MM' считается отъ востока къ сѣверу до 360° (см. § 406); слѣд. азимутъ $PMM' = Z$ бока MM' будетъ

$$Z = 90° + \gamma - \beta$$

не забывая придавать 360° къ $90° + \gamma$, если $90° + \gamma < \beta$.

§ 416. Во всѣхъ вышепредложенныхъ формулахъ геогр. широта l подошвы Q перпендикуляра, предполагалась извѣстною. Остается разсмотрѣть способы, служащіе для ея опредѣленія. Изобразивъ амплитуду дуги $AQ = x$ чрезъ u, а широту начала осей координатъ чрезъ λ, искомая широта l бу-

детъ $=\lambda \pm u$, гдѣ u будетъ входить съ тѣмъ же знакомъ, какой находится предъ x. Отсюда видимъ, что рѣшеніе нашего вопроса состоитъ въ опредѣленіи амплитуды дуги меридіана по данной ея длинѣ.

Если величина абсциссы x незначительна, то амплитуда ея получится чрезъ дѣленіе оной на $\varrho \sin 1''$, гдѣ ϱ есть радіусъ кривизны меридіана при точкѣ, находящейся по срединѣ ея. Но если же x имѣетъ длину значительную, тогда надобно прибѣгнуть къ иному строжайшему способу, а именно:

Пусть s будетъ длина дуги меридіана въ саженяхъ, u длина дуги, выраженная въ частяхъ радіуса принятаго за единицу и измѣряющая искомую амплитуду оной, и λ широта южной ея оконечности. Такъ какъ u есть функція дуги s, $u=fs$, то по теоремѣ Маклореня получимъ

$$u=(u)_0+\left(\frac{du}{ds}\right)_0 s+\tfrac{1}{2}.\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_0 s^2+\tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3u}{ds^3}\right)_0 s^3+\ldots\ldots$$

означая чрезъ $(u)_0$, $\left(\frac{du}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)_0$, ... величины, въ которыя обращаются данная функція и ея послѣдовательные дифференціальные коефиціенты отъ положенія $s=0$.

Но какъ вообще дифференціалъ амплитуды не иное что есть, какъ дифференціалъ географ. широты λ, $du=d\lambda$, то будетъ

$$u=(u)_0+\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)_0 s+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)_0 s^2+\tfrac{1}{6}\left(\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right)_0 s^3+\ldots\ldots$$

и сверхъ того, такъ какъ отъ положенія $s=0$, данная функція u обращается въ нуль, $(u_0)=0$, а $\frac{d\lambda}{ds}$ въ $\frac{1}{\varrho}=\frac{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{A(1-e^2)}$ (см. § 174), то для опредѣленія $\left(\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right)_0$, ... должно последовательно дифференцировать въ отношеніи къ s выраженіе $\frac{d\lambda}{ds}=\frac{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{A(1-e^2)}$, и найдемъ

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2}=-\tfrac{3}{2}\frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{A}\sin 2\lambda\cdot\frac{d\lambda}{ds},$$

$$\frac{d^3\lambda}{ds^3}=-\tfrac{3}{2}\frac{e^2}{(1-e^2)}\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{e^2(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\sin^2 2\lambda.}{A}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{2(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}\cos 2\lambda.}{A}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+\frac{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}\sin 2\lambda}{A}\cdot\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right\}.$$

Подставя въ сіе послѣднее урав. вмѣсто $\frac{d\lambda}{ds}$ и $\frac{d^2\lambda}{ds^2}$ найденныя нами величины, потомъ положивъ $s=0$, отъ чего $\frac{d\lambda}{ds}$ обращается въ $\frac{1}{\varrho}$, по сокращеніи получимъ

$$\left(\frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)_0=-\tfrac{3}{2}\cdot\frac{e^2\sin 2\lambda}{(1-e^2)N\varrho}$$

$$\left(\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right)_0=\frac{3e^2}{(1-e^2)N\varrho}\left\{\frac{e^2\sin^2 2\lambda}{(1-e^2)N}-\frac{\cos 2\lambda}{\varrho}\right\}$$

гдѣ $N=\frac{A}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\lambda)}}$ выражаетъ нормаль при широтѣ λ.

Послѣ чего вышепредложенный рядъ, обратится въ

$$u=\frac{s}{\varrho}-\tfrac{3}{4}\cdot\frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{\sin 2\lambda}{N\varrho}s^2+\frac{e^2}{2(1-e^2)N\varrho}\left\{\frac{e^2\sin^2 2\lambda}{(1-e^2)N}-\frac{\cos 2\lambda}{\varrho}\right\}s^3.$$

Здѣсь u представляетъ длину дуги, выраженную въ частяхъ радіуса принятаго за единицу; но какъ по условію вопроса требуется найдти число ея секундъ, то подставимъ $u\sin 1''$ вмѣсто u. Сверхъ того, для примѣненія сей формулы къ разсматриваемому нами вопросу, надобно подставить x вмѣсто s; въ слѣдствіе чего получимъ

$$u=L-\lambda=Cx+Dx^2+Ex^3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6).$$

положивъ для сокращенія

$$C=\frac{1}{\varrho\sin 1''},\quad D=-\tfrac{3}{4}\cdot\frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{\sin 2\lambda}{N\varrho\sin 1''},$$

$$E=\frac{e^2}{2(1-e^2)N\varrho\sin 1''}\left[\frac{e^2\sin^2 2\lambda}{(1-e^2)N}-\frac{\cos 2\lambda}{\varrho}\right].$$

Для широты $\lambda=59^\circ\ 56'\ 31'',00$, соотвѣтствующей академической обсерваторіи въ Петербургѣ, принятой Генераломъ

Шубертомъ за начало осей координатъ, получимъ въ саженяхъ:

$$\log C = \bar{2}.8385295,$$
$$\log D = \overline{10}.0023202-,$$
$$\log E = \overline{17}.11412$$

Должно замѣтить, что коефиціенты C, D, E, постоянны для всего пространства занимаемаго тригонометрическою сѣтью. Впрочемъ, если она простирается по направленію меридіана, далѣе 600 верстъ, то для доставленія дѣйствію строжайшей точности полезно при вычисленіи амплитуды абсциссы x, разложить сію послѣднюю на $\alpha + x'$, и опредѣливъ сперва амплитуду для α, и посему найдя широту λ' оконечности дуги α, подставить въ нашу формулу вмѣсто N и ϱ величины соотвѣтствующія для λ', а потомъ уже вычислять амплитуду дуги x' (*).

§ 417. Объяснимъ все вышеизложенное примѣромъ: пусть $x = -208729,32$, $y = -111836,49$, будутъ данныя координаты, при вычисленіи коихъ за главную точку принималась имѣющая широту $\lambda = 59° 56' 31'',00$. Сперва вычисляемъ широту l подошвы перпендикуляра по формулѣ (5), а потомъ P, L и γ по формуламъ (1), (3) и (4).

вычисл. l по форм. (6)

x....5.3195836—		
C....$\bar{2}$.8385295		
4.1581131—	..1-й чл.=	— 3°59′51″,733
x^2...$\overline{10}$.63917		
D...$\overline{10}$.00232—		
0.64149—	....2-й чл.=—	4,380
x^3...15.9587—		
E...$\overline{17}$.1141		
$\bar{1}$.0728—	.....3-й чл.=—	0,118
	u=	—3.59.56,231
	λ=	59.56.31, 00
	l=	55.56.34, 77

вычисл. N *для l по форм.* 17, § 172

e....	$\bar{2}$.9122052
sin l....	9.9182824
sin ψ....	8·8304876
ψ =	3° 52′ 51″,6
A....	6.4755385
доп. cos ψ....	0.0009970
N....	6.4765355
доп. N....	$\bar{7}$.5234645
доп. N sin 1″..	$\bar{2}$.8378896
доп. N² sin 1″..	$\bar{8}$.3613541

(*) Генералъ Шубертъ при вычисленіи широты l подошвы перпендикуляра поступалъ иначе: онъ прикладывалъ данную абсциссу x къ дугѣ S меридіана, заключающейся между экваторомъ и глав-

вычисл. P *по урав.* (1)

y . . . . 5.0485835 —
доп. N sin 1″ . . . . $\bar{2}$.8578896
доп. cos l 0.2517984
4.1382715 — . . . . 1-й чл. = — 3° 49′ 9″,012
0,5 . . . . $\bar{1}$.69897 —
y^2 . . . 10.09717
tang$^2 l$ 0.34002
доп. N^2 . . . $\overline{13}$.04693
1.32136 + ... 2-й чл. = + 20,958
P = — 3. 48. 48, 054

вычисл. l' *по форм.* (3).

0,5 . . . . $\bar{1}$.6989700 —
y^2 . . . 10.0971670
tang l 0.1700808
N^2 sin 1″ . . . . $\bar{8}$.3613541
α . . . . 2.3275719 — . . . . 1-й чл. = — 212″,604
y^2 . . . 10.09727 —
доп. 12 N^2 . . . $\overline{15}$.96775
2.39249 + ... 2-й чл. = + 0,025
3 . . . . 0.47712
tang$^2 l$ 0.34002
$\bar{1}$.20963 . . . . 3-й чл. = + 0,162
e . . . . $\bar{2}$.91220
cos l 9.74820
e cos l . . . . $\bar{2}$.66040
e^2 cos$^2 l$ . . . . $\bar{3}$.32080
α . . . . 2.32757 —
1.64838 — . . . . 4-й чл. = — 0,445
сумма = — 212,862
или = — 0° 3′ 32″,86
l = 55. 56. 34. 77
l' = 55. 53. 1, 91.

ною точкою, или вычиталъ ее изъ оной, смотря по знаку находящемуся предъ x, и такимъ образомъ получивъ разстояніе по меридіану подошвы перпендикуляра отъ экватора въ саженяхъ, приискивалъ въ особой таблицѣ имъ составленной, число градусовъ широты, соотвѣтствующее дугѣ S $\pm$ x. (См. *Записки Военно-Топогр. Депо*, ч. VII, стр. 78).

вычисл. y по форм. (4)

$$\frac{y}{N\sin 1''} \ldots 3.8864731-$$
$$\text{tang}\,l \ldots 0.1700808$$
$$4.0565539 - \ldots\ldots\ldots 1\text{-й чл.} = -3^\circ\, 9'\, 50'',79$$
$$y^2 \ldots 10.09717$$
$$\text{доп.}N^2 \ldots \overline{13}.04693$$
$$\tfrac{1}{6} \ldots \overline{1}.22185-$$
$$0.42250 \ldots\ldots\ldots\ldots 2\text{-й чл.} = + \quad 2,64$$
$$2 \ldots 0.30103$$
$$\text{tang}^2 l \ldots 0.34002$$
$$1.06355 \ldots\ldots\ldots\ldots 3\text{-й чл.} = + \quad 11,58$$
$$y = -3.9.36,57$$

И такъ, если позиціонный уголъ какого либо бока при опредѣляемой точкѣ найденъ былъ $\beta = 123^\circ\,56'\,24'',53$, то введя эту величину y въ выраженіе $Z = 90^\circ - \beta + y$, получимъ для величины азимута сего бока $Z = 322^\circ\,53'\,58'',90$.

§ 418. Во многихъ случаяхъ встрѣчается надобность въ рѣшеніи обратнаго вопроса, именно: *по данной широтѣ и долготѣ точки, опредѣлить ея сферическія координаты.* Изъ многихъ способовъ, нижеслѣдующій заслуживаетъ вниманіе по своей простотѣ и точности.

Пусть PM (чер. 203) будетъ меридіанъ, принимаемый за ось абсциссъ, M′ какая либо точка, которой даны широта L и долгота MPM′=P. Опустивъ изъ ней перпендикулярную дугу MM′ на меридіанъ PM, длина ея выразитъ искомую ординату y; абсцисса же x точки M′ получится, если изъ широты l подошвы M перпендикуляра вычтемъ широту λ начала осей координатъ, и потомъ эту разность $l-\lambda$ умножимъ на $\varrho\sin 1''$, гдѣ ϱ есть радіусъ кривизны меридіана при точкѣ, коей широта есть $\frac{1}{2}(l+\lambda)$; если же разность $l-\lambda$ значительно велика, (на прим. болѣе 1°), то абсцисса x опредѣлится съ большею точностію по формулѣ, выражающей длину дуги эллиптическаго меридіана по даннымъ широтамъ ея оконечностей (см. § 174 урав. 20). Изъ сего легко заключить, что рѣшеніе разсматриваемаго вопроса состоитъ въ опредѣленіи длины дуги MM′=y и широты l точки M.

Принявъ MN за нормаль точки M, вообразимъ себѣ сферу, описанную радіусомъ MN изъ точки N. Продолживъ плоскости разсматриваемыхъ меридіановъ PM, PM′, до пересѣченія съ этою сферою, произойдетъ на ней прямоугольный сферич. треуг. pMm, въ коемъ уг. $p=P$ и бокъ $pM=90°-l$, а бокъ pm не будетъ равенъ $90°-L$, но выразитъ дополненіе до $90°$ *неисправленной широты* точки M′, т. е. если сію широту означимъ чрезъ l', то будетъ $pm=90°-l'$ (см. § 386) Положивъ на первый разъ неисправленную широту l' извѣстною, изъ треуг-ка pMm получимъ

$$\sin y=\sin P.\cos l' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\operatorname{tang} l=\frac{\operatorname{tang} l'}{\cos P}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Остается разсмотрѣть, какимъ образомъ опредѣляется неисправленная широта l' по данной истинной L.

Въ § 386 доказано было нами, что если означимъ чрезъ D истинную разность широтъ точекъ M и M′, а чрезъ d разность неисправленныхъ широтъ оныхъ, то $D=d+de^2\cos^2 l$ или $L-l=l'-l+(l'-l)e^2\cos^2 l$, откуда

$$l'=L+(l-l')e^2\cos^2 l\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Но урав. (8), подставя $1-2\sin^2\frac{1}{2}P$ вмѣсто $\cos P$, даетъ

$$\operatorname{tang} l-\operatorname{tang} l'=2\sin^2\tfrac{1}{2}P.\operatorname{tang} l,$$

или

$$\frac{\sin(l-l')}{\cos l.\cos l'}=2\sin^2\tfrac{1}{2}P.\operatorname{tang} l.$$

откуда $\sin(l-l')$ или $(l-l')\sin 1''=2\sin^2\frac{1}{2}P.\sin l.\cos l'\ldots\ldots(10)$

Внеся эту величину въ урав. (9), получимъ

$$l'=L+\alpha.2\sin^2\tfrac{1}{2}P\sin l.\cos^2 l.\cos l'$$

положивъ для сокращенія $\alpha=\frac{e^2}{\sin 1''}$, $\log\alpha=3.1388355$.

Такъ какъ послѣдній членъ уравненія (10) всегда бываетъ незначителенъ, то безъ чувствительной погрѣшности можно въ него подставить L вмѣсто l и l', и будетъ

$$l'=L+\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}P.\sin 2L.\cos^2 L.$$

И такъ по опредѣленіи отсюда широты l', рѣшать уравненія (7) и (8); послѣ того, угловую величину y, получаемую

изъ урав. (7) умножать на $N \sin 1''$, гдѣ N есть нормаль при широтѣ l, а по найденной амплитудѣ $l-\lambda$ (съ помощію урав. (8) вычислять линейную длину ея дуги

Такъ на прим. принявъ Петербургскую обсерваторію, которой широта есть $\lambda = 59° 56' 31'',00$ за начало осей координатъ опредѣлимъ координаты точки, коей широта есть $L = 55° 25' 0''$, а долгота $P = 6° 30' 0''$. Вотъ полное вычисленіе:

$\sin\frac{1}{2}P$....8.75353		$\sin P$....9.0538588	
$\cos L$....9.75404		$\cos l'$....9.7540416	
8.50757		$\sin y$....8.8079004	
$\sin^2\frac{1}{2}P\cos^2 L$....7.01514		$y = 3° 41' 2'',48 = 13262'',48$	
$\sin 2L$....9.97063		$\log y$....4.1226248	
α....3.13883	$L = 55° 25' 0''$	доп. $N \sin 1''$..1.1621021	
0.12460..........1,33		y....5.2847269	
	$l' = 55.25.1,33$	$y = 192631,3$ саженей.	
$\tan l'$....0.1615193			
$\sec P$....0.0028007			
$\tan l$....0.1643200	$l = 35° 55' 22'',22$		

Такъ какъ здѣсь разность $\lambda - l$ простирается свыше 4°, то будетъ не точно опредѣлять длину x чрезъ умноженіе $\lambda - l$ на $\rho \sin 1''$, и потому для вычисленія x надобно прибѣгнуть къ формулѣ (20) § 174. Всего же удобнѣе этотъ вопросъ рѣшится посредствомъ составленной Генераломъ Шубертомъ таблицы (см. примѣч. на стр. 58) выражающей длину эллиптической дуги меридіана, заключающейся между экваторомъ и данною широтою. Такимъ образомъ въ сей таблицѣ находимъ, что разстоянія отъ экватора точекъ, имѣющихъ широту λ и l, суть

$$s = 3115279,8$$
$$s' = 2887147,0$$

разность $x = -228132,8$

—

ГЛАВА IV.

О геодезической линіи.

§ 419. При производствѣ тригонометрической сѣти не рѣдко мѣстныя обстоятельства не дозволяютъ ея точки связать посредствомъ ряда треугольниковъ съ нѣкоторыми пунктами, положеніе коихъ нужно знать для составленія карты страны; иногда же можетъ случиться, что мѣстныя препятствія не дозволяютъ избрать мѣста удобнаго для измѣренія базиса тригонометрической сѣти, какъ на прим. если снимаемая страна весьма гориста, или желаютъ покрыть купу островов сѣтью треугольниковъ. Въ сихъ случаяхъ единственное средство, служащее для рѣшенія вопроса съ приближенною точностію состоитъ въ томъ, чтобы по сдѣланіи астрономическихъ наблюденій на обѣихъ опредѣляемыхъ точкахъ, найдти потомъ чрезъ вычисленіе длину разстоянія между ними по даннымъ: 1-е) географической широтѣ каждой изъ точекъ, и 2-е) разности ихъ долготъ или азимуту линіи ихъ соединяющей. И дѣйствительно, если M и M' (чер. 203) суть двѣ точки земной поверхности и требуется опредѣлить между ними длину разстоянія $MM'=K$, то вообразивъ себѣ, что сіи точки соединены съ полюсомъ P посредствомъ меридіановъ PM, PM' произойдетъ сфероидальный треугольникъ, который можно будетъ рѣшить, коль скоро въ немъ кромѣ двухъ боковъ PM, PM', выражающихъ дополненіе до $90°$ ихъ широтъ, извѣстенъ или заключающійся между ними уг. P (т. е. разность ихъ долготъ), или прилежащій уг. PMM' (т. е. азимутъ линіи MM'). Займемся рѣшеніемъ сихъ двухъ вопросовъ.

§ 420. I. *По даннымъ широтамъ* l и L *двухъ точекъ* M, M', (чер. 203) *и азимуту* z *линіи* MM', *требуется опредѣлить ея длину* $MM'=K$ *въ саженяхъ?*

Вообразимъ себѣ сферу, описанную нормалью MN точки M, и предположимъ, что pMm представляетъ сфер. треуголь-

никъ образуемый на ней сѣченіями плоскостей меридіановъ точекъ M и M′: дуга pM будетъ $=90°-l$, а дуга $mp=90°-l'$, гдѣ l' выражаетъ *неисправленную широту* точки M′, опредѣляемую уравненіемъ (см. стр. 6) $D=d(1+e^2\cos^2 l)$, откуда $d=D(1-e^2\cos^2 l)$ или $l'-l=(L-l)\ (1-e^2\cos^2 l)=(L-l)(1-e^2\cos^2 l)$, слѣд. $l'=l+(L-l)(1-e^2\cos^2 l)$. Для рѣшенія треуг-ка pMm, по даннымъ бокамъ pM, pM' и уг. $pMM'=z$ найдемъ сперва величину угла $pmM=z'$ посредствомъ уравненія

$$\sin z'=\sin z\frac{\cos l}{\cos l'}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Послѣ чего примѣнивъ къ треуг-ку pMm одну изъ неперовскихъ аналогій (см. урав. 63 ч. I стр. 27), получимъ

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(pM-pm)\ \text{или}\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(l'-l)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}MM'\frac{\sin\frac{1}{2}(z'-z)}{\sin\frac{1}{2}(z'+z)},$$

откуда $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}MM'\ \text{или}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d\,\frac{\sin\frac{1}{2}(z+z')}{\sin\frac{1}{2}(z'-z)}\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

означая чрезъ a амплитуду дуги MM′, или что все равно величину угла MNM′, и положивъ для краткости $l'-l=d$.

Наконецъ искомая длина разстоянія K, будетъ $Na\sin 1''$, гдѣ N есть нормаль точки M.

Впрочемъ вычисленіе будетъ проще, если выразивъ дугу a посредствомъ тангенса (см. урав. 22, ч. I стр. 4)

$$\tfrac{1}{2}a=\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}a)-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3(\tfrac{1}{2}a)$$

подставимъ сюда вмѣсто $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a$ его величину выражаемую чрезъ урав. (2), т. е.

$$\tfrac{1}{2}a=C-\tfrac{1}{3}C^3$$

положивъ для краткости $C=\operatorname{tang}\frac{1}{2}d\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}(z'+z)}{\sin\frac{1}{2}(z'-z)}$.

Но $a=\dfrac{K}{N}$, слѣд.

$$K=2NC-\tfrac{2}{3}NC^3=2NC(1-\tfrac{1}{3}C^2)$$

чего логариѳмъ будетъ

$$\log K=\log 2+\log N+\log C-\tfrac{1}{3}MC^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

гдѣ $\log(\frac{1}{3}M)=\bar{1}.16066$.

Для примѣра возьмемъ части треугольника предложенныя на стр. 8, именно: $l = 56°28'29'',81$, $L = 56°15'26'',64$ и $z = 140°31'51'',79$. Сперва вычисляемъ l' и z':

$e^2 \ldots \bar{3}.82441$		$\sin z \ldots 9.8033782$
$(L-l) \ldots 2.89386-$		$\cos l \ldots 9.7421763$
$\cos^2 l \ldots 9.48435$	$L = 56°15'26'',64$	$\sec l' \ldots 0.2553501$
$0.20262- \ldots\ldots +1,59$		$\sin z' \ldots 9.8009046$
	$l' = 56.15.28,23$	$z' = 39°13'4'',84$
	$l = 56.28.29,81$	$z = 140.30.51,79$
	$l - l' = d = 0.13.1,58$	$z + z' = 179.43.56,63$
	$\frac{1}{2}d = 0.6.30,79\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(z+z') = 89.51.58,31$
$\mathrm{tang}\frac{1}{2}d \ldots 7.2775185$		$z - z' = 101.17.46,95$
$\sin\frac{1}{2}(z+z') \ldots 9.9999988$		$\frac{1}{2}(z-z') = 50.38.53,47$
доп.$\sin\frac{1}{2}(z-z') \ldots 0.1116705$		
$C \ldots \bar{3}.3891878$	$C^2 \ldots \bar{6}.7783$	
$N \ldots 6.4765480$	$\frac{1}{3}M \ldots \bar{1}.1607$	
$2 \ldots 0.3010300$	$\bar{7}.9390$	
4.1667658	$\frac{1}{3}MC^2 = 0,0000009$	
поправка $\ldots -0.0000009$		
$K \ldots 4.1667649$		

$K = 14681,31$, что разнствуетъ отъ величины предложенной на стр. 8 на 0,46 саж.

§ 421. II. *По даннымъ широтамъ* l *и* L *двухъ точекъ* M *и* M′, *и разности ихъ долготъ* P, *требуется опредѣлить между ними разстояніе* MM′=K.

Изъ многихъ рѣшеній этого вопроса, способъ предложенный Пюиссаномъ (см. Traité de Géod. 3-e édition, p. 368) замѣчательнѣе прочихъ по своей простотѣ и строгой точности, а именно:

Положивъ $x = K\cos z$ и $y = K\sin z$ въ формулахъ (A′) и (B′) (см. §§ 386 и 388), получимъ

$$D = \frac{x}{\varrho \sin 1''} - \frac{1}{2}\frac{y^2 \mathrm{tang}\, l}{N\varrho \sin 1''} - \frac{1}{6}\cdot\frac{y^2 x}{N\varrho \sin 1''}(1 + 3\,\mathrm{tang}^2 l),$$

$$P = \frac{y}{N \sin 1'' \cos l'}.$$

Здѣсь D выражаетъ разность широтъ обѣихъ точекъ на эллипсоидѣ, а P разность ихъ долготъ, и наконецъ l' неисправленную широту точки M′ опредѣляемую сходно съ изложеннымъ въ предшедшемъ §. Если въ 1-мъ изъ сихъ уравненій отбросимъ послѣдній членъ по причинѣ его незначительности, то найдемъ для y и x слѣдующія величины:

$$y = NP\sin 1''\cos l' \dots\dots\dots\dots (4)$$

$$x = D\varrho\sin 1'' + \frac{y^2\tang l}{2N} \dots\dots\dots\dots (5)$$

не забывая, что N означаетъ нормаль подъ широтою l, а ϱ радіусъ кривизны меридіана подъ широтою $\frac{1}{2}(l+l')$.

Отсюда заключаемъ, что по опредѣленіи y изъ урав. (4), подставятъ его величину въ урав. (5); послѣ чего изъ уравненій

$$y = K\sin z, \quad x = K\cos z,$$

получимъ $$\tang z = \frac{y}{x},\ K = \frac{y}{\sin z} = \frac{x}{\cos z} \dots\dots\dots\dots (6)$$

Для примѣра возьмемъ за данныя, величины предложенныя въ § 386, т. е. $l = 56°28'29'',81$, $L = 56°15'26'',64$, $P = 0°19'17'',06$. Здѣсь $D = L - l = -0°13'3'',17 = -783'',17$, $\frac{1}{2}(l+L) = 56°21'58''$. На стр. 8, найдено было нами для сихъ широтъ: $\log N = 6.4765480$, $\log(\varrho\sin 1'') = 1.1612260$; а на стр. 64, $l' = 56°15'28'',23$. Самое вычисленіе располагаемъ слѣдующимъ образомъ:

N....6.4765480	D....2.8938560—		
P....3..633560	ϱ sin 1''....1.1612260		
sin 1''....4.6855749—	4.0550820—	....—11352,25	
cos l'....9.7446500	y^2....7.94026		
y....3.9701289	tang l....0.17880		
x....4.0542415—	доп.(2N)....$\bar{7}$.22242		
tang z...9.9158874—	1.34148.........	+	21,95
z = 140°30′50″,63		x = —11330,30 саж.	
y....3.9701289			
sin z....9.8033810			
K....4.1667479			

K = 14680,73, что разнствуетъ отъ величины предложенной на стр. 8, на 0,12 сажени.

Еслибы пожелали доставить этому рѣшенію еще большую точность, надлежало бы къ величинѣ D приложить .... $-\frac{xy^2}{6N^2}(1+3\tang^2 l)$, или что все равно къ найденной по вышесказанному величинѣ x приложить $+\frac{D\varrho\sin 1''y^2}{6N^2}(1+3\tang^2 l)$, и потомъ исправленную такимъ образомъ величину x ввести въ урав. (6).

§ 422. Впрочемъ оба способа предложенные нами касательно опредѣленія длины кратчайшаго разстоянія между двумя точками земной поверхности, до тѣхъ только поръ будутъ имѣть удовлетворительную точность, пока разстояніе между ними незначительно. Но еслибы потребовалось рѣшить тотъ же вопросъ въ обширномъ значеніи, т. е. опредѣлить кратчайшее разстояніе на земномъ сфероидѣ между какими бы то ни было двумя точками, тогда оно представило бы значительныя трудности, ибо линію, выражающую кратчайшее разстояніе между двумя отдаленными точками на эллипсоидѣ, не льзя въ строгомъ смыслѣ принимать за дугу круга, но за линію двойной кривизны. Рѣшеніемъ этаго вопроса занимались многіе знаменитые геометры, каковы Ейлеръ, Оріани и Пюиссанъ. Но ни кто изъ нихъ не принесъ въ семъ случаѣ такой важной услуги для геодезіи какъ Бессель. Сей ученый занявшись снова рѣшеніемъ этого вопроса, и найдя общее выраженіе длины кратчайшаго разстоянія между двумя пунктами на эллипсоидѣ вращенія въ функціи ихъ широтъ и разности долготъ, вывелъ отсюда рѣшеніе обратнаго, состоящаго въ опредѣленіи по данной длинѣ геодезической линіи, географической широтѣ ея оконечности и азимуту оной, географическую широту другой оконечности, и разность долготъ, съ точностію, строжайшею нежели посредствомъ всѣхъ способовъ дотолѣ употреблявшихся геодезистами. По важности сего предмета, излагаемъ здѣсь этотъ способъ, помѣщенный въ Astron. Nachrichten № 86.

§ 423. Пусть P будетъ полюсъ (чер. 215), A и B двѣ точки на земномъ сфероидѣ, соединенныя одна съ другою *какою нибудь кривою;* M и M′ двѣ точки взятыя на ней въ

безконечно близскомъ между собою разстоянiи, $MM'=ds$; l и $l+dl$ широты сихъ точекъ, а P и dP долготы ихъ, считаемыя отъ меридiана AP и принимая ихъ со знакомъ $+$ къ востоку, а съ $-$ къ западу. Здѣсь очевидно $PM=90°-l$, а уг. $MPM'=dP$. Изобразимъ азимутъ, считаемый отъ сѣвера къ востоку до 360°, дуги AM при точкѣ M чрезъ z, т. е. уг. $AMP=360°-z$, а радiусъ кривизны меридiана и радiусъ параллели подъ широтою l чрезъ ϱ и r. Опустивъ изъ M′ на меридiанъ PM перпендикуляръ cM', можемъ по причинѣ близости точекъ M и M′, принимать его за часть дуги параллели проходящей чрезъ M′, а слѣд. дугу Mc за разность широтъ оныхъ. Такъ какъ прямоуг. треуг. $MM'c$ находится на земномъ сфероидѣ, то длина дуги cM выразится чрезъ ϱdl, а длина дуги $M'c$ чрезъ $r dP$, разумѣя подъ dl и dP разности широтъ и долготъ, выраженныя въ частяхъ радiуса принятаго за единицу. И такъ, изъ сего треуг-ка $MM'c$, въ коемъ $MM'=ds$, а уг. $M'Mc=z-180°$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} Mc \text{ или } \varrho\, dl &= -ds.\cos z = -\frac{dr}{\sin l} \text{ (см. § 174)} \\ M'c \text{ или } r\, dP &= -ds.\sin z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

и наконецъ $$ds^2=\varrho^2 dl+r^2 dP$$

откуда $$ds=dP\sqrt{\left(\varrho^2.\frac{dl^2}{dP^2}+r^2\right)}$$

или положивъ для краткости $\frac{dl}{dP}=q$, и $\sqrt{\varrho^2 q^2+r^2}=U$, будетъ $$ds=U\,dP.$$

Разстоянiе между точками A и B, измѣренное по линiи AB будетъ интегралъ сего выраженiя отъ A до B, т. е.

$$s=\int U.dP.$$

Если разсматриваемая кривая есть линiя геодезическая, т. е. кратчайшая, то зависимость между l и P должна быть такова, чтобы сей интегралъ s былъ наименьшiй. Изобразимъ сiю зависимость чрезъ f, т. е. $U=f(l,q)$ или $=f\left(l, \frac{dl}{dP}\right)$.

Если же станемъ разсматривать иную кривую, которая не

служитъ кратчайшимъ разстояніемъ между данными пунктами A и B, то для каждой ея точки, величинѣ P будетъ соотвѣтствовать не l, но $l+t$, гдѣ t есть функція отъ P, обращающаяся въ нуль при точкахъ A и B, ибо предполагаемъ что эта кривая пересѣкается въ сихъ точкахъ линіею геодезическою. Всякую такую кривую, которой длину между A и B, означимъ чрезъ $s'=\int U'dP$, можно разсматривать какъ происходящею отъ $s=\int U.dP$, коль скоро вмѣсто l въ выраженіи $U=f\left(l, \frac{dl}{dP}\right)$ подставимъ $l+t$, и будетъ $U'=f\left(l+t, \frac{d(l+t)}{dP}\right)$ или $=f\left(l+t, q+\frac{dt}{dP}\right)$. Но по тейлоровой теоремѣ имѣемъ

$$U'=U+\left(\frac{dU}{dl}\right)t+\left(\frac{dU}{dq}\right).\frac{dt}{dP}+\ldots\ldots\ldots$$

Умноживъ на dP, и взявъ интегралъ будетъ

$$s'=s+\int\left[\left(\frac{dU}{dl}\right).t.dP+\left(\frac{dU}{dq}\right)dt\right]+\ldots\ldots$$

На основаніи теоріи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ докажется, что дабы s' всегда былъ $>s$, какое бы t ни было, надлежитъ, чтобы

$$\int\left(\frac{dU}{dl}\right)t.dP+\int\left(\frac{dU}{dq}\right)dt=0;$$

но вмѣсто послѣдняго члена можно взять $t.\left(\frac{dU}{dq}\right)-\int t.d\left(\frac{dU}{dq}\right)$ и поелику должно брать интегралы между предѣлами A и B, въ которыхъ t обращается въ нуль, то наше условное уравненіе, будетъ

$$\int t\left\{\left(\frac{dU}{dl}\right).dP-d\left(\frac{dU}{dq}\right)\right\}=0.$$

Такъ какъ сей интегралъ долженъ обращаться въ нуль для всякаго неопредѣленнаго t, то

$$\left(\frac{dU}{dl}\right)dP-d\left(\frac{dU}{dq}\right)=0,$$

или умножив на $\frac{dl}{dP}=q$, будетъ

$$\left(\frac{dU}{dl}\right)dl - q.d\left(\frac{dU}{dq}\right)=0,$$

чего интегралъ есть

$$U - q.\frac{dU}{dq}=\textit{постоян.}$$

Подставя $\sqrt{(\varrho^2q^2+r^2)}$ вмѣсто U, и такъ какъ $\frac{dU}{dq}$ $=\frac{\varrho^2q}{\sqrt{(\varrho^2q^2+r^2)}}$, то по сокращеніи получимъ

$$\textit{пост.}=\frac{r}{\sqrt{\left(1+\frac{\varrho^2}{r^2}q^2\right)}}=\frac{r}{\sqrt{\left(1+\frac{\varrho^2}{r^2}\cdot\frac{dl^2}{dP^2}\right)}}=\frac{r}{\sqrt{\left(1+\frac{\cos^2z}{\sin^2z}\right)}}=\pm r\sin z,$$

что и выражаетъ главное свойство геодезической линіи.

Изобразивъ азимутъ геодезической линіи AB (чер. 215) при точкѣ A чрезъ z', а при точкѣ B чрезъ $z=360-ABP$; радіусы земныхъ параллелей при A и B чрезъ r' и r, на основаніи выведеннаго свойства геодезической линіи, получимъ

$$r'\sin z'=r\sin(z-180°)$$

или $$r'\sin z'=-r\sin z\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Но если положимъ радіусъ экватора $=A$, и означимъ чрезъ u и u' *приведенную широту* (*) вышесказанныхъ точекъ, то будетъ $r'=A\cos u'$, $r=A\cos u$, а урав. (8) обратится въ

$$\cos u'\sin z'=-\cos u.\sin z\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

(*) Пусть PMI (чер. 224) будетъ эллиптическій меридіанъ, M точка на немъ взятая и коей широта есть l: если опишемъ радіусомъ экватора дугу pM'I и проведемъ чрезъ M перпендикуляръ M'G къ CI, то уг. M'CI$=u$ называется *приведенною широтою* (latitude réduite) точки M. Изъ прямоуг. треуг-ка CM'G, въ которомъ CM'$=$A, CG$=$QM$=r$, т. е. радіусу параллели точки M, имѣемъ $r=A\cos u$. Для опредѣленія угла u по данной широтѣ l, или обратно, замѣтимъ, что такъ какъ радіусъ параллели $r=N\cos l$,

Это урав. очевидно можно разсматривать принадлежащимъ сфер. треуг-ку ABC (чер. 208), въ которомъ бока $AC=90^\circ-u'$, $CB=90^\circ-u$, уг. $CAB=z'$ и уг. $CBA=360^\circ-z$. Примѣнивъ къ нему формулы (33) и (39) ч. I, стр. 15 и 16, и положивъ уг. $C=\omega$, а противулежащій бокъ $AB=\sigma$, получимъ

$$\left.\begin{aligned}\sin u &= \sin u'.\cos\sigma + \cos u'.\sin\sigma.\cos z'\\ \cos u.\cos z &= \sin u'.\sin\sigma - \cos u'.\cos\sigma.\cos z'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(10)$$

Возьмемъ такія вспомогательныя дуги m и M, чтобы

$$\left.\begin{aligned}\sin u' &= \cos m.\sin M\\ \cos u'.\cos z' &= \cos m.\cos M\\ \cos u'.\sin z' &= \sin m\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

Уравненія (10) и (9) отъ подстановки сихъ выраженій обратятся въ

$$\left.\begin{aligned}\sin u &= \cos m.\sin(M+\sigma)\\ \cos u.\cos z &= -\cos m.\cos(M+\sigma)\\ \cos u.\sin z &= -\sin m\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

(гдѣ N есть нормаль), или $r=\frac{A\cos l}{\sqrt{1-e^2\sin^2 l}}$, то

$$\cos u=\frac{\cos l}{\sqrt{1-e^2\sin^2 l}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a);$$

возведя это урав. въ квадратъ и подставя $1-\sin^2$ вмѣсто $\cos^2$, получимъ $\sin^2 u+e^2\sin^2 l-e^2\sin^2 l.\sin^2 u=\sin^2 l$

отсюда
$$\sin u=\frac{\sin l\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)}}\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

$$\tan u=\tan l\sqrt{1-e^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

Для опредѣленія же l по данному u, очевидно получимъ

$$\left.\begin{aligned}\sin l &= \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}\\ \cos l &= \frac{\cos u\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}\\ \tan l &= \frac{\tan u}{\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(d)$$

Если въ вышесказанномъ треуг-кѣ примемъ бокъ $90°-u'$ и уг. z' за постоянныя, а уг. ω и противолежащій бокъ σ за перемѣнныя, то уг. z съ бокомъ $90°-u$ будутъ также измѣняться. Дабы найдти зависимость отъ того происходящую въ сихъ частяхъ, одифференцируемъ 1-е изъ уравненій (10) относительно u и σ, и получимъ

$$\cos u\,.\,du = -(\sin u'\,.\,\sin\sigma - \cos u'\cos\sigma\cos z')\,d\sigma;$$

но какъ величина заключающаяся въ скобкѣ выражаетъ первую часть 2-го изъ уравненій (10), то будетъ

$$du = -\cos z\,.\,d\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Тотъ же треугольникъ по теоремѣ синусовъ даетъ

$$\sin\omega\,.\,\cos u = \sin\sigma\,.\,\sin z'.$$

Одифференцировавъ опять относительно ω, u и σ, получимъ

$$\cos\omega\cos u\,.\,d\omega - \sin\omega\sin u\,.\,du = \sin z'\,.\cos\sigma\,.\,d\sigma,$$

или подставя вмѣсто du вышенайденную величину, будетъ

$$\cos\omega\cos u\,.\,d\omega = -(\sin\omega\sin u\,.\cos z - \sin z'\cos\sigma)d\sigma;$$

но $\sin\omega\sin u\,.\cos z - \sin z'\cos\sigma = \sin z\,.\cos\omega$ (*),

слѣд. $\cos\omega\,.\cos u\,.\,d\omega = -\sin z\,.\cos\omega\,.\,d\sigma,$

или $\cos u\,.\,d\omega = -\sin z\,.\,d\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$

Если возьмемъ теперь 1-е изъ уравненій (7) и внесемъ въ него $A\cos u$ вмѣсто r, то будетъ

$$\cos z\,.\,ds = -\frac{A\sin u\,.\,du}{\sin l},$$

(*) Это урав. получится, если примѣнимъ къ треуг-ку ABC (чер. 208) относительно угловъ ω, $360°-z$ и боковъ σ и $90°-u$, формулу (35) ч: I стр. 16, и будетъ

$$\cot\sigma\,.\cos u = \sin u\,.\cos z - \sin z\,.\cot\omega;$$

но какъ вообще $\cot = \frac{\cos}{\sin}$, и какъ по теоремѣ синусовъ имѣемъ $\frac{\cos u\sin\omega}{\sin\sigma} = \sin z'$, то найдемъ

$$\cos\sigma\,.\sin z' = \sin u\,.\cos z\,.\sin\omega - \sin z\,.\cos\omega,$$

откуда $\cos\omega\,.\sin z = \sin u\,.\cos z\,.\sin\omega - \cos\sigma\,.\sin z'.$

или исключивъ отсюда du посредствомъ уравненія (13), получимъ

$$ds = \frac{A \sin u . d\sigma}{\sin l} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Если внесемъ эту величину вмѣсто ds во 2-е изъ уравненій (7), то будетъ

$$r dP = -\frac{A \sin u . \sin z . d\sigma}{\sin l},$$

или исключивъ $\sin z . d\sigma$ посредствомъ урав. (14), и поелику $r = A \cos u$, получимъ

$$dP = \frac{\sin u}{\sin l} . d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Но какъ $\sin l = \frac{\sin u}{\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u)}}$ (см. примѣч. на стр. 70), то формулы (15) и (16) обратятся въ

$$ds = A\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} . d\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$dP = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} . d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Займемся теперь интегрированіемъ уравненія (17). Такъ какъ $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$, а $\sin u = \cos m . \sin(M + \sigma)$ (см. 1-е урав. 12), то

$$ds = A\sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m . \sin^2 (M + \sigma)}\, d\sigma;$$

раздѣливъ подкоренную величину на $1 - e^2$, и положивъ

$$\lambda^2 = \frac{e^2 \cos^2 m}{1 - e^2} \text{ или } \lambda = \frac{e \cos m}{\sqrt{(1 - e^2)}},$$

получимъ $\quad ds = A\sqrt{(1 - e^2)}\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 (M + \sigma)}\, d\sigma,$

Если развернемъ радикалъ въ рядъ по нютонову биному, то будетъ

$$\left\{1 + \lambda^2 \sin^2 (M + \sigma)\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 (M + \sigma) - \tfrac{1}{2.4}\lambda^4 . \sin^4 (M + \sigma)$$
$$+ \tfrac{1.3}{2.4.6}\lambda^6 \sin^6 (M + \sigma);$$

но $\sin^2 (M + \sigma) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2(M + \sigma))$

$\sin^4 (M + \sigma) = \frac{1}{8}[3 - 4 . \cos 2(M + \sigma) + \cos 4(M + \sigma)]$

$\sin^6 (M + \sigma) = \frac{1}{4.8}[10 - 15 . \cos 2(M + \sigma) + 6 . \cos 4(M + \sigma) - \cos 6(M + \sigma)]$

Подставя сіи величины вмѣсто синусовъ въ вышепредложенный рядъ, по преобразованіи получимъ

$$ds = A\sqrt{(1-e^2)}\left\{a - b\cos 2(M+\sigma) - c\cos 4(M+\sigma) - \ldots\right\}d\sigma$$

гдѣ

$$a = 1 + \frac{1}{1.2}\lambda^2 - \frac{3}{2.4.8}\lambda^4 + \frac{1.2.3.5}{2.4.6.8}.\tfrac{1}{4}\lambda^6 \ldots\ldots$$

$$b = (\tfrac{1}{2})^2.\lambda^2 - (\tfrac{1}{4})^2\lambda^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\tfrac{3}{4}\lambda^6 \ldots\ldots$$

$$c = \frac{1}{2.4.8}\lambda^4 - \frac{1.3.3}{2.4.6.8}.\tfrac{1}{2}\lambda^6 - \ldots\ldots$$

Послѣ чего искомый интегралъ будетъ

$$s = A\sqrt{(1-e^2)}\left\{a\sigma - \tfrac{1}{2}b\sin 2(M+\sigma) - \tfrac{1}{4}c\sin 4(M+\sigma) - \ldots\right\} + \textit{пост.};$$

но если положимъ $\sigma = 0$, то будетъ и $s = 0$, а слѣд.

$$0 = A\sqrt{1-e^2}\left\{-\tfrac{1}{2}b\sin 2M - \tfrac{1}{4}c\sin 4M - \ldots\ldots\right\} + \textit{постоян.}$$

Разность сихъ уравненій даетъ

$$s = A\sqrt{1-e^2}.\Big\{a\sigma - \tfrac{1}{2}b[\sin 2(M+\sigma) - \sin 2M]$$
$$- \tfrac{1}{4}c[\sin 4(M+\sigma) - \sin 4M]\ldots\Big\}$$

и какъ вообще $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, то получимъ

$$s = A\sqrt{1-e^2}.\Big\{a\sigma - b.\cos(2M+\sigma)\sin\sigma$$
$$- \tfrac{1}{2}c.\cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma\ldots\Big\}\ldots\ldots(19).$$

Такова формула, выражающая разстояніе между двумя пунктами посредствомъ величинъ u', z' и σ. Если же бы напротивъ изъ геодезическихъ дѣйствій извѣстны были s и z, равно какъ и u' по зависимости ея отъ данной широты l' пункта А (чер. 215), тогда разрѣшивъ урав. (19) опредѣлилось бы σ; послѣ чего нашли бы широту оконечности дуги s, и азимутъ этой геодезической линіи посредствомъ уравненій (12). Но для опредѣленія величины σ изъ урав. (19) можно поступить двоякимъ образомъ: или чрезъ способъ обращенія рядовъ, или что еще удобнѣе чрезъ приближеніе. И въ самомъ дѣлѣ, урав. (19) даетъ

$$\sigma = \frac{\alpha s}{A\sqrt{1-e^2}} + \beta\cos(2M+\sigma)\sin\sigma + \gamma\cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma\ldots(20)$$

гдѣ $\alpha = \frac{1}{a \sin 1''}$, $\beta = \frac{b}{a \sin 1''}$, $\gamma = \frac{c}{2a \sin 1''}$

Здѣсь ввели $\sin 1''$ въ знаменателя для того, чтобы урав. (20) давало величину σ выраженною въ секундахъ; въ уравненіе же (19) она входила, выраженною въ частяхъ радіуса принятаго за единицу.

Бессель, для легчайшаго вычисленія формулы (20) составилъ особыя таблицы логариѳмовъ величинъ α, β и γ, аргументомъ коихъ служитъ $\log \frac{e \cos m}{\sqrt{1-e^2}}$ (*). Эти таблицы помѣщены въ Руководствѣ къ исчисленію тригон. съемки, изданной капитаномъ Максимовымъ. С.П.б. 1848.

§ 424. Выведенныя нами теперь формулы доставляютъ возможность по вычисленнымъ полярнымъ координатамъ точекъ триг. сѣти опредѣлить ихъ широту съ строгою точностію. Данныя величины въ семъ случаѣ суть во 1-хъ) *географическая широта* l' *начала* А координатъ; во 2-хъ) *длина дуги* s, соединяющая А съ какою либо точкою В и въ 3-хъ) *азимутъ* z' сей дуги при точкѣ А. Самое же вычисленіе дѣлается въ слѣдующемъ порядкѣ:

1-е) Сперва опредѣляется величина u', соотвѣтствующая точкѣ А, изъ формулы $\tang u' = \tang l' \sqrt{1-e^2}$ (см. примѣч. на стр. 70).

2-е) По даннымъ u' и z' опредѣляется М, $\sin m$ и $\cos m$ изъ урав. (11).

3-е) Вычисляется $\log \frac{e \cos m}{\sqrt{(1-e^2)}}$, служащій аргументомъ таб-

---

(*) Считаемъ долгомъ замѣтить, что урав. (17) объинтегрировано нами иначе, нежели какъ предложено Бесселемъ въ № 86 Astr. Nachrichten, и отъ того выведенные нами ряды, выражающіе величину коефиціентовъ, различествуютъ отъ имъ найденныхъ. Мы сочли приличнѣйшимъ предпочесть путь простѣйшій и болѣе удободоступный для читателя, нежели какъ исполнено Бесселемъ, потому болѣе, что вычисленіе таблицъ его, по выведеннымъ нами рядамъ малосложнѣе, хотя и имѣетъ ту же самую точность, по крайней мѣрѣ до 9-й десятичной цифры.

лицъ Бесселя, доставляющихъ логариѳмы коефиціентовъ α, β и γ урав. (20).

4-е) Отбросивъ 2-й и 3-й члены въ урав. (20), для 1-го приближенія принимаютъ $\sigma = \frac{\alpha}{A\sqrt{1-e^2}}.s$; потомъ введя сію величину во 2-й членъ, получатъ первую поправку для σ; исправленную такимъ образомъ сію величину вводятъ снова во 2-й и 3-й членъ, чрезъ что получится точная величина σ.

5-е) По найденнымъ $\cos m$ и $M+\sigma$ вычисляется изъ урав. (12) искомый азимутъ z и приведенная широта u.

Наконецъ 6-е) по найденному u опредѣляется l изъ формулы $\text{tang}\, l = \frac{\text{tang}\, u}{\sqrt{1-e^2}}$.

Въ заключеніе остается присовокупить, что все вычисленіе производится въ 8 десятичныхъ знакахъ, исключая 2-го и 3-го членовъ формулы (20): 2-й членъ вычисляется въ 5, а 3-й въ 3-хъ знакахъ.

§ 425. Займемся теперь, для опредѣленія разности P долготъ, интегрированіемъ уравненія (18), т. е.

$$dP = \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,.d\omega$$

Интегралъ сего уравненія заключаетъ въ себѣ двѣ отдѣльныя постоянныя m и e, которыя не могутъ быть соединены вмѣстѣ, такъ что для строгаго рѣшенія вопроса, не льзя привести его въ таблицы, которыя бы можно было употреблять при всякомъ e. Но сего можно достигнуть, если ограничимся приближеніемъ, коего бы точность превышала ту, какая нужна для практики. Вышепредложенное урав. можно написать такъ:

$$dP = d\omega - (1-\sqrt{1-e^2\cos^2 u}).d\omega;$$

но $d\omega.\cos u = -d\sigma.\sin z$ (урав. 14), а $\cos u' \sin z' = -\cos u \sin z$ (урав. 9); по исключеніи $\sin z$, будетъ $d\omega = \frac{\sin z'.\cos u'}{\cos^2 u}.d\sigma$, что подставя и потомъ объинтегрировавъ, получимъ

$$P = \omega - \sin z'.\cos u' \int \frac{1-\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}{\cos^2 u}.d\sigma.$$

Возьмемъ такія три произвольныя количества p, q и y, чтобы удовлетворялось урав.

$$\frac{1-\sqrt{1^2-e^2\cos^2 u}}{\cos^2 u}=\frac{e^2}{2}(1+e^2p.\cos^2 u)^q\,(1+y).$$

откуда

$$1+y=\frac{2(1-\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}{e^2\cos^2 u(1+e^2p.\cos^2 u)^q}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{4}e^2\cos^2 u+\frac{1}{8}e^4.\cos^4 u+\frac{5}{64}e^6.\cos^6 u+\ldots\ldots}{1+pqe^2\cos^2 u+q.\frac{q-1}{2}p^2.e^4.\cos^4 u+q.\frac{q-1}{2}.\frac{q-2}{3}p^3e^6\cos^6 u+\ldots}$$

Такъ какъ взятыми нами тремя произвольными количествами можно располагать по желанію, то возьмемъ ихъ такъ, чтобы первые три члена числителя этого выраженія равнялись первымъ тремъ членамъ знаменателя, т. е. $pq=\frac{1}{4}$, $q.\frac{q-1}{2}.p^2=\frac{1}{8}$, откуда будетъ $\frac{q-1}{q}=4$ или $q=-\frac{1}{3}$, и слѣд. $p=-\frac{3}{4}$; послѣ чего

$$1+y=\frac{1+\frac{1}{4}e^2\cos^2 u+\frac{1}{8}e^4\cos^4 u+\frac{5}{64}e^6.\cos^6 u+\ldots\ldots}{1+\frac{1}{4}e^2\cos^2 u+\frac{1}{8}e^4\cos^4 u+\frac{7}{96}e^6.\cos^6 u+\ldots\ldots}$$

$$=1+\frac{6}{192}e^6\cos^6 u+\ldots\ldots$$

Отсюда видимъ, что если отбросимъ y, то погрѣшность въ P будетъ принадлежать къ порядку e^8; наибольшее вліяніе сей погрѣшности на P есть $\frac{1}{384}e^8$, что незначительно при самыхъ огромныхъ геодезическихъ измѣреніяхъ, даже когда вычисленіе будемъ дѣлать по таблицамъ о 10 десятичныхъ знакахъ. И такъ, отбрасывая членъ y, подставимъ вмѣсто p и q ихъ величины и не забывая, что $\cos u'\sin z'=\sin m$, получимъ

$$P=\omega-\frac{1}{2}e^2\sin m\int\frac{d\sigma}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{4}e^2\cos^2 u)}}$$

$$=\omega-\frac{1}{2}e^2\sin m\int\frac{d\sigma}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}e^2\cos^2 m\sin^2(M+\sigma))}}.$$

Поступая съ сею функціею одинаково какъ на стр. 72, т. е. раздѣливъ и умноживъ подрадикальную величину на $1-\frac{3}{4}e^2$, и положивъ

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{e^2\cos^2 m}{(1-\frac{3}{4}e^2)}=\lambda'^2$$

найдемъ $P=\omega-\frac{1}{2}\frac{e^2\sin m}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{4}e^2)}}\cdot\int\frac{d\sigma}{\sqrt[3]{\left\{1+\lambda'^2\sin^2(M+\sigma)\right\}}}$

Если развернемъ $\left\{1+\lambda'^2\sin^2(M+\sigma)\right\}^{-\frac{1}{3}}$ въ рядъ по нютонову биному, потомъ вмѣсто $\sin^2(M+\sigma)$, $\sin^4(M+\sigma)$ и $\sin^6(M+\sigma)$, подставимъ величины, выраженныя посредствомъ косинусовъ кратныхъ дугъ, то по преобразованіи и сокращеніи получимъ

$$P=\omega-\frac{e^2\sin m}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{4}e^2)}}\int\left\{\alpha' d\sigma+\beta'\cos 2(M+\sigma)d\sigma+2\gamma'\cos 4(M+\sigma).d\sigma..\right\},$$

положивъ для краткости

$$\alpha'=\tfrac{1}{2}(1-\frac{1}{2.3}.\lambda'^2+\frac{1}{3.4}\lambda'^4-\frac{5.7}{8.9.9}\lambda'^6+\ldots\ldots.)$$
$$\beta'=\tfrac{1}{2}(\frac{1}{2.3}\lambda'^2-\frac{1}{3.3}\lambda'^4+\frac{3.5.7}{2.8.9.9}\lambda'^6+\ldots\ldots.)$$
$$\gamma'=\tfrac{1}{2}(\frac{1}{2.3.3.4}\lambda'^4-\frac{3.7}{2.8.9.9}\lambda'^6+\ldots\ldots.)$$

Интегрируя отъ $\sigma=0$ (подобно какъ на стр. 73), найдемъ

$$P=\omega-\frac{e^2\sin m}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{4}e^2)}}\left\{\alpha'\sigma+\beta'\cos(2M+\sigma)\sin\sigma+\gamma'\cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma\right\}(21)$$

Логариѳмы двухъ первыхъ коефиціентовъ α' и β' этого ряда помѣщены во 2-й таблицѣ Бесселя (*) (см. стр. 74), аргументомъ коихъ служитъ

$$\log\lambda'=\log\frac{\sqrt{\frac{3}{4}e^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^2}}.\cos m.$$

(*) Такъ какъ каждый изъ членовъ формулы (21) долженъ выражать секунды, то при вычисленіи величины β', соотвѣтствующій ея рядъ $\frac{1}{2}(\frac{1}{6}\lambda'^2-\frac{1}{9}\lambda'^4\ldots.)$ раздѣленъ въ таблицѣ на $\sin 1''$; въ разсужденіи же коефиціента α' этого не сдѣлано, потому что въ выраженіи $\alpha'\sigma$, вмѣсто σ должно вводить секунды дуги.

И такъ, сперва вычислятъ уг. ω вспомогательнаго сфер. треуг-ка (см. стр. 70), по одной изъ слѣдующихъ формулъ

$$\sin\omega = \frac{\sin\sigma\sin z'}{\cos u} = -\frac{\sin\sigma\sin z}{\cos u'} = \frac{\sin\sigma\,.\,\sin m}{\cos u\,.\cos u'},$$

или $$\tan g\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos\frac{1}{2}(u'+u)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z'+z) = \frac{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\sin\frac{1}{2}(u'+u)}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z'-z);$$

Послѣ того съ помощію вышесказанныхъ таблицъ, опредѣлится по формулѣ (21) искомая долгота P.

§ 426. Изъ вышеизложеннаго легко заключить, что хотя способъ Бесселя и весьма точенъ; однако по чрезвычайной сложности своихъ вычисленій неудобенъ въ практическомъ отношеніи. По сей причинѣ при производствѣ обширныхъ геодезическихъ дѣйствій, какъ у насъ въ Россіи, этотъ способъ съ пользою можно употреблять изрѣдка вмѣсто повѣрки вычисленныхъ уже широтъ и долготъ по другимъ простѣйшимъ способамъ. И дѣйствительно, такъ какъ при вычисленіи широты и долготы точекъ, на прим. по способу, предложенному въ гл. I, не льзя ручаться за вѣрность нѣкоторыхъ долей секунды, и какъ этого рода вычисленія дѣлаются послѣдовательно переходя отъ однѣхъ точекъ къ другимъ, то при множествѣ точекъ можетъ произойдти значительное накопленіе такихъ неизбѣжныхъ погрѣшностей. Въ слѣдствіе чего, если вычислены будутъ потомъ полярныя координаты первокласныхъ точекъ, то выбравъ нѣкоторыя изъ нихъ весьма отдаленныя однѣ отъ другихъ, и опредѣливъ ихъ широту и долготу по способу Бесселя, доставится тѣмъ средство удостовѣриться въ степени вѣрности сдѣланныхъ прежде вычисленій и если какъ въ широтѣ и долготѣ окажется незначительная разность съ прежде найденными результатами, то эту разность разложатъ по ровну на всѣ промежуточныя точки.

—

ГЛАВА V.

Объ измѣреніи дугъ меридіановъ и параллелей.

A.) ДУГИ МЕРИДІАНОВЪ.

§ 427. Для измѣренія дуги меридіана, какъ уже намъ извѣстно, составляютъ триг. сѣть 1-го разряда по направленію измѣряемой дуги; потомъ чрезъ строжайшія астрономическія наблюденія опредѣляютъ географ. широту какъ крайнихъ точекъ треангуляціи, такъ и нѣкоторыхъ изъ промежуточныхъ. Разность широтъ каждой пары этихъ точекъ выразитъ амплитуду дуги меридіана, заключающейся между земными параллелями, проведенными чрезъ сіи точки; длина же дуги выводится чрезъ вычисленіе. Способъ Лежандра изложенный нами въ отдѣл. II, главѣ V, хотя и весьма точенъ, однако имѣетъ то неудобство, что сложенъ и несообразенъ съ духомъ анализа. Предлагаемые здѣсь два способа не имѣющіе этого недостатка.

§ 428. I *Способъ*. Пусть A (чер. 214) будетъ главная точка сѣти, т. е. принятая за начало осей; M точка, служащая сѣверною оконечностію градуснаго измѣренія: широты обѣихъ сихъ точекъ предполагаемъ съ точностію извѣстными изъ астрономическихъ наблюденій. Опустивъ изъ точки M перпендикуляръ QM на меридіанъ AP, дуги $MQ = y$ и $AQ = x$ выразятъ вычисленныя ея координаты (*). Если бы точки M и Q находились на одной и той же дугѣ земной параллели, то широты ихъ были бы одинаковы, и потому разность географ. широтъ точекъ A и M, выразила бы амплитуду дуги, линейная длина коей есть x, и слѣд. рѣшеніе

(*) Само собою разумѣется, что если бы вычислены были не прямоугольныя, но полярныя координаты, то эти величины y и x получились бы руководствуясь изложеннымъ въ § 413.

вопроса было бы окончено. Но точки M и Q не льзя разсматривать лежащими на одной и той же параллелѣ, даже въ томъ случаѣ, еслибы точка M находилась въ весьма недальнемъ разстояніи отъ меридіана. И такъ предположимъ, что Mq есть земная параллель, проходящая чрезъ M: искомая длина s дуги меридіана будетъ не AQ, но Aq; и слѣд. необходимо изъ вычисленной длины абсциссы $AQ = x$, вычесть малую дугу Qq, $s = x - Qq$. Займемся опредѣленіемъ длины сей дуги Qq въ линейной мѣрѣ.

Изобразимъ географич. широту точки Q чрезъ l, а данную широту точки M чрезъ L. Разность сихъ широтъ опредѣлится посредствомъ формулы (A′) § 386, если въ ней положимъ $K = y$ и $z = 90°$, (ибо z въ разсматриваемомъ нами случаѣ есть азимутъ дуги $QM = y$ при точкѣ Q), и получимъ

$$D = L - l = -\tfrac{1}{2}\frac{y^2 \tang l}{N\varrho \sin 1''}.$$

Знакъ — выражаетъ, что $l > L$. Такъ какъ D здѣсь выражаетъ число секундъ заключающихся въ дугѣ Qq, то длина ея получится, если умножимъ ее на $\varrho \sin 1''$, разумѣя подъ ϱ радіусъ кривизны меридіана подъ широтою $\frac{1}{2}(l + L)$, и слѣд. длина дуги Qq будетъ

$$Qq = (l - L)\varrho \sin 1'' = \tfrac{1}{2}\frac{y^2 \tang l}{N} \text{ и } s = x - \tfrac{1}{2}\frac{y^2 \tang l}{N}.$$

Должно при семъ замѣтить, что хотя въ послѣдній членъ сей формулы входитъ широта l точки Q, которая здѣсь неизвѣстна, однако по малости этого члена не произойдетъ чувствительной погрѣшности, если вмѣсто l подставимъ широту L точки M. Впрочемъ, еслибы пожелали не пренебрѣчь и таковою погрѣшностію, то достаточно по вычисленіи сего члена раздѣлить его на $\varrho \sin 1''$; частное выразитъ разность D широтъ точекъ Q и M; послѣ чего приложивъ D къ L, подставятъ $L + D$ вмѣсто l въ послѣдній членъ формулы и снова вычислятъ его величину. Или: можно поступить какъ сказано было въ § 416, т. е. обративъ дугу меридіана $AQ = x$ въ секунды приложить ихъ къ широтѣ точки A; сумма выразитъ широту l точки Q, и эту величину l внести въ уравненіе.

Такимъ же образомъ поступятъ при опредѣленіи поправки для точки лежащей къ югу отъ начала осей, съ тою только разницею, что эту поправку надобно прикладывать къ данной абсциссѣ *x*, ибо *x* въ семъ случаѣ будетъ со знакомъ —.

Для примѣра вычислимъ длину дуги меридіана, заключающейся между Дерптомъ и Якобштадтомъ, служившимъ южною оконечностію градуснаго измѣренія г. академика Струве. Изъ строжайшихъ астрономическихъ наблюденій имъ найдена была геогр. широта Якобштадта $L = 56°30'4'',562$; но въ § 413 вычислены нами были въ тоазахъ прямоугольныя координаты, считаемыя отъ Дерптской обсерваторіи, именно: $x = -107109{,}81$, $y = -27283{,}86$; слѣд. принимая сіи величины за данныя, опредѣлимъ искомую поправку. Вотъ ходъ вычисленія:

e....	$\bar{2}.9122052$	A....	6.5148235 (въ тоаз.)
sin L....	9.9211129	sec ψ....	0.0010101
sin ψ....	8.8333181	N.....	6.5158336
	$\psi = 3°54'23''$		
0,5....	$\bar{1}.6989700$—		
y^2....	8.8718114		
tang L....	0.1792399		
доп. N....	$\bar{7}.4841664$		$x = -107109{,}81$
	2.2381877—	......поправка = —	171,47
			$s = -107281{,}28$

Но еслибы вмѣсто L ввели широту l подошвы Q ординаты, $l = 56°30'18'',23$, то для величины поправки нашли бы 171,497, а потому истинная длина дуги меридіана между Дерптомъ и Якобштадтомъ будетъ $= 107281{,}307$ (*).

(*) Не должно забывать, что при вычисленіи на стр. 51, координатъ *y* и *x*, слѣдуя г. Струве мы принимали за данные: логариѳмъ кратчайшаго разстоянія между Дерптомъ и Якобштадтомъ, log=5.0434761, и азимутъ этой линіи при Дерптѣ, который равенъ 194° 17′37″,24. Но какъ этотъ ученый на основаніи наблюденій, сдѣланныхъ имъ въ Якобштадтѣ, нашелъ, что азимутъ той же дуги при Якобштадтѣ былъ 13°33′58″,29, то принявъ эти

§ 429. 2-й *Способъ*. Пусть M, M′, M″,.... (чер. 222) будутъ точки треангуляціи, соединяющіяся боками K, K′, K″... треугольниковъ. Вообразимъ себѣ, что чрезъ сіи точки проведены дуги земныхъ параллелей MQ, M′Q′, M″Q″.... и что онѣ пересѣкаютъ меридіанъ AP въ точкахъ Q, Q′, Q″.... Искомая длина цѣлой дуги меридіана, заключающаяся между крайними точками треангуляціи получится, если по опредѣленіи длины дугъ QQ′, Q′Q″.... сложимъ ихъ вмѣстѣ. Но какъ для опредѣленія длины каждой изъ сихъ отдѣльныхъ дугъ, на прим. $QQ'=s$, достаточно число секундъ въ ней заключающихся, или что тоже разность широтъ точекъ M и M′, умножить на $\varrho \sin 1''$, (гдѣ ϱ есть радіусъ кривизны соотвѣтствующій срединѣ сей дуги), то возьмемъ формулу (A′) § 386, представляющую на эллипсоидѣ вращенія разность D широтъ двухъ точекъ, именно:

$$D=\frac{K\cos z}{\varrho\sin 1''}-\frac{1}{2}\frac{K^2\tang l.\sin^2 z}{N\varrho\sin 1''}-\frac{1}{6}\frac{K^2\cos z\sin^2 z}{N^2\varrho\sin 1''}(1+3\tang^2 l)$$

и умноживъ обѣ части уравненія на $\varrho\sin 1''$, получимъ

$$D\varrho\sin 1'' \text{ или } s=K\cos z-\frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\tang l.\sin^2 z$$
$$-\frac{1}{6}\frac{K^3}{N^2}\cos z.\sin^2 z\,(1+3\tang^2 l).$$

Такова формула, выражающая длину проложенія бока K триг. сѣти на меридіанѣ посредствомъ параллелей. Она весьма употребительна по строгой своей точности; въ ней z есть азимутъ бока K триг. сѣти при точкѣ, коей широта есть l, а N нормаль при той же точкѣ. Для повѣрки самыхъ вычисленій, опредѣляютъ такимъ образомъ проложенія боковъ

величины за новыя данныя, найдемъ руководствуясь § 413, для координатъ Дерпта $y=25921,956$, $x=107447,416$ тоаз. Послѣ чего повторивъ вышепредложенное вычисленіе получимъ для длины дуги меридіана между Якобштадтомъ и Дерптомъ $s=107280,262$. Если возьмемъ среднюю величину обоихъ этихъ результатовъ, то будетъ $s=107280,785$, что различествуетъ отъ результата Г. Струве на 0,216 тоаза, ибо эта дуга по его вычисленію найдена была $=107281,001$.

какъ къ востоку, такъ и къ западу лежащихъ. Сумма проложеній выразитъ длину дуги меридіана, и не только всю вполнѣ, но и по частямъ, какъ предложено было въ § 162.

B.) ИЗМѢРЕНІЕ ДУГЪ ПАРАЛЛЕЛЕЙ.

§ 430. Къ числу точнѣйшихъ средствъ, служащихъ къ изслѣдованію вида земной поверхности должно причислить измѣреніе дугъ земныхъ параллелей (*). И дѣйствительно, если бы земля была въ строгомъ смыслѣ правильный эллипсоидъ вращенія, то земныя параллели были бы правильные круги, а слѣд. амплитуды дугъ какой либо одной изъ нихъ, были бы пропорціональны съ ихъ длиною. Изъ чего слѣдуетъ, что если измѣрены будутъ нѣсколько дугъ одной и той же параллели и опредѣлены амплитуды ихъ, то о правильности или неправильности вида земли заключатъ изъ того, выполняется ли эта пропорціональность или нѣтъ.

Измѣреніе дугъ параллелей съ дугами меридіановъ, приводитъ сверхъ того къ рѣшенію одного изъ важнѣйшихъ вопросовъ высшей геодезіи, именно: къ опредѣленію сжатости, соотвѣтствующей тому эллипсоиду вращенія, который болѣе прочихъ соприкасается съ цѣлою поверхностію той страны.

Для измѣренія дуги параллели составляютъ тригонометрическую сѣть по направленію отъ запада къ востоку въ недальнемъ отъ ней разстояніи; опредѣляютъ строжайшими астрономическими способами широту и разность долготъ, какъ крайнихъ, такъ и нѣкоторыхъ изъ промежуточныхъ точекъ сѣти, и сверхъ того азимуты ея боковъ при сихъ точкахъ. Послѣ того найдя съ помощію сихъ данныхъ широту и дол-

---

(*) Изъ градусныхъ измѣреній этого рода, наиболѣе заслуживаетъ вниманіе измѣреніе дуги параллели подъ широтою 45° 43′ 12″ во Франціи между Мареномъ и Коломбье Г-ми Бруссо и Николе. Эта дуга была продолжена къ востоку до Милана астрономами барономъ Плана и Карлини, а потомъ офицерами австрійскаго генеральнаго штаба до Падуи. Амплитуда всей дуги простирается почти до 13°.

готу всѣхъ прочихъ точекъ сѣти и азимуты по формуламъ предложеннымъ въ гл. I сего отдѣленія, приступаютъ потомъ къ вычисленію длины дуги параллели слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что II′ (чер. 218) представляетъ измѣряемую дугу параллели подъ широтою λ, а MM′ одинъ изъ боковъ триг. сѣти: дуга OQ сей параллели, заключающаяся между меридіанами PMO, PM′Q, проведенными чрезъ точки M, M′, выразитъ на ней проложеніе бока MM′, а перпендикуляры DO, DQ, опущенные изъ точекъ O и Q на земную ось, радіусы измѣряемой параллели. Плоскій уголъ QDO, составляемый сими перпендикулярами будетъ равняться сфер. углу $MPM' = P$, т. е. разности долготъ точекъ M, M′. Принимая уг. P выраженнымъ въ секундахъ, длина дуги OQ, которую изобразимъ чрезъ Y, будетъ $Y = P . \sin 1'' . DQ$; но прямол. треуг. DQN, въ которомъ уг. $D = 90°$, а QN есть нормаль N подъ широтою λ, даетъ $DQ = N \cos \lambda$; слѣд.

$$Y = N \cos \lambda . P \sin 1'' \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

И такъ, если разности долготъ послѣдовательныхъ точекъ триг. сѣти вычислены по формуламъ, предложеннымъ въ 1-й главѣ, то подставляя ихъ въ урав. (1) вмѣсто P, сумма результатовъ выразитъ длину цѣлой дуги параллели, заключающейся между меридіанами, проведенными чрезъ пункты, положеніе коихъ было опредѣлено астрономически, а разность долготъ сихъ точекъ, найденная съ помощію пороховыхъ сигналовъ, или перевозки многихъ хронометровъ — ея амплитуду.

Но чтобы не вычислять разности долготъ съ тою единственно цѣлію, чтобы потомъ подставлять ихъ въ урав. (1), будетъ проще и даже точнѣе поступать слѣдующимъ образомъ:

Пусть z будетъ вычисленный азимутъ бока MM′, (считаемый отъ сѣвера къ востоку) при точкѣ M; l' широта другой точки M′, и $N' = N'M'$ нормаль при сей послѣдней. Если вообразимъ себѣ, описанную сферу радіусомъ равнымъ нормали M′N′ и имѣющую свой центръ въ оконечности ея N′, то составится на ней сфер. треуг. pMM', въ которомъ угловая

величина бока $MM' = K$ (см. § 386) будетъ $a = \frac{K}{N' \sin 1''}$, бокъ $M'p = 90° - l'$, уг. $pMM' = z$ и уг. $p = P$, т. е. разности долготъ. Этотъ треуг. даетъ

$$\sin P = \frac{\sin a . \sin z}{\cos l'};$$

но $\sin P = P \sin 1'' - \frac{1}{6} P^3 \sin^3 1''$, $\sin a = \frac{K}{N'} - \frac{1}{6} \frac{K^3}{N'^3}$; слѣд.

$$P \sin 1'' = \left(\frac{K}{N'} - \frac{1}{6} \frac{K^3}{N'^3} \right) \frac{\sin z}{\cos l'} + \frac{1}{6} P^3 \sin^3 1'';$$

отсюда для 1-го приближенія имѣемъ $P \sin 1'' = \frac{K \sin z}{N' \cos l'}$; возведя въ 3-ю степень и потомъ подставя въ послѣдній членъ, найдемъ

$$P \sin 1'' = \frac{K \sin z}{N' \cos l'} - \frac{K^3 \sin z}{6 N'^3 \cos l'} + \frac{K^3 \sin^3 z}{6 N'^3 \cos^3 l'}.$$

Если внесемъ это выраженіе въ урав. (1) вмѣсто $P \sin 1''$, то получимъ

$$Y = \frac{N \cos \lambda}{N' \cos l'} \left\{ K \sin z - \frac{K^3 \sin z}{6 N'^2} \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\cos^2 l'} \right) \right\} \ldots\ldots (2).$$

Такова формула, служащая для вычисленія проложенія на дугѣ параллели даннаго бока K триг. сѣти, азимутъ коего при одной изъ его оконечностей есть z, а широта другой оконечности сей линіи есть l'; N' есть нормаль подъ сею широтою l', а N подъ широтою λ.

При семъ должно замѣтить, что если отбросимъ послѣдніе два члена, по причинѣ ихъ незначительности, потомъ вмѣсто $\frac{N}{N'}$ подставимъ $\sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 l'}{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}$ и развернемъ радикалъ ограничиваясь членами 2-го порядка, то получимъ

$$Y = K \sin z \frac{\cos \lambda}{\cos l'} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin(l' - \lambda) \sin(l' + \lambda) \right) \ldots\ldots (3)$$

Посредствомъ сей формулы бар. Плана и Карлини вычисляли длину дуги параллели между Коломбье и Миланомъ.

Объяснимъ примѣромъ: принявъ за данныя $\log K = 4.1667514$, $z = 144°30'51'',79$ и $l' = 56°15'26'',64$, вычислимъ по формулѣ (2) длину проложенія бока K на параллелѣ, которой широта $\lambda = 56°$. Дѣйствіе начинаемъ съ опредѣленія нормалей $N = \frac{A}{\cos\psi}$ и $N' = \frac{A}{\cos\psi'}$, гдѣ $\sin\psi = e\sin\lambda$ и $\sin\psi' = e\sin l'$.

$e \ldots \bar{2}.9122052$	$e \ldots \bar{2}.9122052$	$A \ldots 6.4755385$
$\sin\lambda \ldots 9.9185742$	$\sin l' \ldots 9.9198839$	$\sec\psi' \ldots 0.0010044$
$\sin\psi \ldots 8.8307794$	$\sin\psi' \ldots 8.8320891$	$N' \ldots 6.4765429$
$\psi = 3°53'0'',9$	$\psi' = 3°53'43''$	$\cos l' \ldots 9.7446550$
		$N'\cos l' \ldots 6.2211979$

$A \ldots 6.4755385$	коеф $\ldots 0.00290$	
$\sec\psi \ldots 0.0009984$	$K\sin z \ldots 3.97013$	
$N \ldots 6.4765369$	$K^2 \ldots 8.33350$	
$\cos\lambda \ldots 9.7475617$	доп. $N'^2 \ldots \overline{13}.04691$	
доп. $(N'\cos l') \ldots \bar{7}.7788021$	$\frac{1}{6} \ldots \bar{1}.22185-$	1-й чл. $= 9397,887$
коеф $\ldots 0.0029007$	$\bar{2}.57529- \ldots$	2-й чл. $= -0,038$
$K \ldots 4.1667514$	$\sin^2 z \ldots 9.60676-$	
$\sin z \ldots 9.8033782$	доп. $\cos^2 l' \ldots 0.51069$	
1-й чл. $\ldots 3.9730303$	$\bar{2}.69274+ \ldots$	3-й чл. $= +0,049$
1-й чл. $= 9397,887$		$Y = 9397,898$ саж.

Если же принимая тѣ же данныя вычислимъ Y по форм. (3), то получимъ $Y = 9397,890$ саж.

§ 431. Въ заключеніе присовокупимъ, что такъ какъ при всѣхъ подобнаго рода вычисленіяхъ нормаль N остается постоянною, а нормаль N′ для каждой точки сѣти измѣняется, то вмѣсто вычисленія логариѳма ея длины по общей формулѣ $N' = A\sec\psi'$ и $\sin\psi' = e\sin l'$, найдемъ общее выраженіе приращенія $\log N$, отъ незначительныхъ измѣненій широты λ.

Одифференцировавъ выраженіе $N^2 = A^2(1 - e^2\sin^2\lambda)^{-1}$, въ отношеніи къ N и λ, получимъ

$$dN = \tfrac{1}{2}\frac{Ne^2\sin 2\lambda}{(1 - e^2\sin^2\lambda)}d\lambda;$$

но $N' = N + dN = N\left(1 + \frac{dN}{N}\right)$, чего логариѳмъ будетъ

$$\log N' = \log N + \log\left(1 + \frac{dN}{N}\right) = \log N + \frac{M.dN}{N},$$

гдѣ M есть модуль. Здѣсь мы ограничиваемся членами 1-го порядка, что для разсматриваемаго случая достаточно. Если изобразимъ послѣдній членъ чрезъ ε,

$$\varepsilon = \frac{M.dN}{N} = \frac{1}{2}\,\frac{Me^2\sin 2\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)}.d\lambda$$

и развернемъ степень —1 выраженія $(1-e^2\sin^2\lambda)^{-1}$, а потомъ означимъ приращеніе $d\lambda$ широты, или $l-\lambda$, чрезъ δ, то найдемъ

$$\log N' = \log N + \varepsilon,\quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}Me^2\delta\sin 1''\sin 2\lambda(1+e^2\sin^2\lambda).$$

Такова величина поправки ε, которую надлежитъ ввести въ $\log N$, чтобы обратить его въ $\log N'$. Величина $\delta = l-\lambda$ выражена въ секундахъ. Сверхъ того должно замѣтить, что такъ какъ предполагаемъ сѣть треуг-въ, находящеюся въ недальнемъ разстояніи отъ измѣряемой параллели, то разность $l-\lambda$ будетъ вообще незначительна, а потому можно отбрасывать членъ заключающій e^4. И такъ, выведенная нами формула обратится въ

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}Me^2\sin 1''.\delta\sin 2\lambda = C.\delta\sin 2\lambda,$$

положивъ постоянное $C = \frac{1}{2}Me^2\sin 1''$. Для сжатости $\frac{1}{299}$, будетъ $\log C = \overline{9}.8467394$. При вычисленіи не должно забывать δ вводить со знакомъ —, если $l<\lambda$. На прим. принимая $\log N = 6.4765369$, что соотвѣтствуетъ $\lambda = 56°$, вычислимъ $\log N'$ для $l = 56°15'26'',64$: здѣсь $l-\lambda = 15'26'',64 = 926'',64$, и будетъ

$$\begin{array}{rl}
\log C = \overline{9}.8467 & \\
\log\delta = 2.9669 & \\
\log\sin 2\lambda = 9.9672 & \log N = 6.4765369 \\
\hline
\overline{6}.7808 \ldots\ldots\ldots\ldots & \varepsilon = 0.0000060 \\
\hline
 & \log N' = 6.4765429
\end{array}$$

§ 432. Займемся теперь опредѣленіемъ сжатости и длины полу-осей того эллипсоида вращенія, который ближе прочихъ соприкасается не съ дугою меридіана, какъ изложено нами было въ § 178, но съ цѣлою поверхностію той страны, въ которой измѣрены были дуги меридіана и параллели.

Возьмемъ выраженіе длины дуги S меридіана (см. § 175, урав. 20) заключающейся между широтами φ и φ'

$$S=A(1-e^2)\left\{\left(1+\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{45}{64}e^4\right)u-\left(\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{15}{16}e^4\right)\sin u\cos U + \tfrac{15}{128}e^4\sin 2u\cos 2U\right\}$$

гдѣ $u=\varphi-\varphi'$, $U=\varphi+\varphi'$. Развернувъ это урав. по восходящимъ степенямъ e^2, получимъ

$$S=A\left\{u-e^2\left(\tfrac{1}{4}u+\tfrac{3}{4}\sin u.\cos U\right) - \tfrac{1}{4}e^4\left(\tfrac{3}{16}u+\tfrac{3}{4}\sin u\cos U-\tfrac{15}{32}\sin 2u\cos 2U\right)\right\}$$

или $$S=Au\left\{1-e^2\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\frac{\sin u.\cos U}{u}\right) - \tfrac{1}{4}e^4\left(\tfrac{3}{16}+\tfrac{3}{4}\frac{\sin u.\cos U}{u}-\tfrac{15}{32}\frac{\sin 2u.\cos 2U}{u}\right)\right\}$$

Но какъ величина u, входящая множителемъ всего уравненія и дѣлителемъ 3-го, 5-го и 6-го членовъ, означаетъ (§ 175) не число градусовъ угла $\varphi-\varphi'$, но длину дуги измѣряющей сей уголъ, и которой радіусъ есть единица, то, чтобы имѣть право вмѣсто u ввести амплитуду измѣренной дуги выраженную въ градусахъ и десятичныхъ частяхъ, надлежитъ предварительно вмѣсто u подставить $\frac{\pi}{180}.u$. Исполнивъ это по сокращеніи получимъ

$$S=\frac{A\pi}{180}u\left\{1-Re^2-Te^4\right\}\ldots\ldots\ldots(4)$$

положивъ для краткости

$$R=\tfrac{1}{4}+\frac{135}{\pi}\frac{\sin u.\cos U}{u},$$

$$T=\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{16}+\frac{135}{\pi}.\frac{\sin u.\cos U}{u}-\tfrac{5}{8}.\frac{135}{\pi}.\frac{\sin 2u.\cos 2U}{u}\right).$$

Но если S есть дуга меридіана, а u ея амплитуда, то длина средняго градуса сей дуги, которую означимъ чрезъ S_m найдется изъ пропорціи $u : S = 1^\circ : S_m$, откуда $S_m=\frac{S}{u}$. И такъ, раздѣливъ все урав. (4) на u, частное выразитъ длину средняго градуса, именно:

$$\frac{S}{u} = S_m = \frac{A\pi}{180^\circ}\left\{1 - Re^2 - Te^4\right\} \dots\dots\dots (5).$$

Пусть D будетъ длина измѣренной дуги параллели подъ широтою λ; P ея амплитуда, N нормаль и $r = N\cos\lambda$ радіусъ этого круга. Изъ пропорціи $180^\circ : \pi N\cos\lambda :: P : D$, имѣемъ $D = \frac{\pi}{180^\circ}.PN\cos\lambda = \frac{\pi}{180^\circ}.PA.\cos\lambda(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$.

Развернувъ двучленъ $(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ и ограничиваясь членами e^4, получимъ

$$D = \frac{A\pi P}{180^\circ}.\cos\lambda(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2\lambda + \tfrac{3}{8}e^4\sin^4\lambda).$$

Такъ какъ P означаетъ здѣсь амплитуду данной дуги, выраженную въ градусахъ и десятичныхъ частяхъ, то если раздѣлимъ обѣ части этого уравненія на P, частное $\frac{D}{P}$, которое для краткости означимъ чрезъ D_m, выразитъ длину средняго градуса измѣренной дуги параллели, и будетъ

$$\frac{D}{P} = D_m = \frac{A\pi}{180^\circ}.\cos\lambda(1 - R'e^2 - T'e^4) \dots\dots\dots (6)$$

положивъ для сокращенія $R' = -\frac{1}{2}\sin^2\lambda$, $T' = -\frac{3}{8}\sin^4\lambda$.

Если раздѣлимъ теперь урав. (5) на урав. (6), то получимъ

$$\frac{S_m\cos\lambda}{D_m} = \frac{1 - Re^2 - Te^4}{1 - R'e^2 - T'e^4}.$$

Рѣшивъ это урав. въ отношеніи къ e^2, найдемъ

$$e^2 = \frac{D_m - S_m.\cos\lambda}{D_m R - S_m.R'\cos\lambda} - e^4\frac{D_m T - S_m.T'\cos\lambda}{D_m R - S_m R'\cos\lambda} \dots\dots (7)$$

Отбросивъ 2-й членъ по его незначительности, и подставя вмѣсто R и R′ ихъ величины, получимъ

$$e^2 = \frac{D_m - S_m\cos\lambda}{D_m\left(\frac{1}{4} + \frac{135}{\pi}\cdot\frac{\sin u\cos U}{u} + \frac{1}{2}S_m\sin^2\lambda\cos\lambda\right)} \dots\dots (8)$$

Впрочемъ если желаютъ опредѣлить e^2 съ строжайшею точностію, надлежитъ по численномъ вычисленіи величины e^2

изъ сего послѣдняго уравненія, подставить ея квадратъ въ предшествующее вмѣсто e^4, и потомъ снова повторить вычисленіе. Послѣ чего сжатость земнаго сфероида μ опредѣлится изъ уравненія (см. § 178, форм. (23)):

$$\mu=\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{1}{8}e^4 \text{ или } =\tfrac{1}{2}e^2(1+\tfrac{1}{2}e^2)\ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

Наконецъ подставя найденную величину e^2 въ урав. (6), получатъ изъ него длину A половины большой оси искомаго эллипсоида вращенія.

§ 433. Въ треангуляціи, составленной между атлантическимъ океаномъ и Падуею, разность долготъ оконечностей дуги и 5 промежуточныхъ пунктовъ, опредѣлена была посредствомъ пороховыхъ сигналовъ; послѣ того по формулѣ (2) вычислили проложенія всѣхъ послѣдовательныхъ боковъ сѣти на параллелѣ подъ широтою $\lambda=45°43'12''$. Такимъ образомъ найдены были длина и амплитуда не только цѣлой дуги, но и шести отдѣльныхъ ея частей. Здѣсь предлагаемъ таблицу найденныхъ результатовъ, заимствованную нами изъ 2-й части 3-го изданія Геодезіи Пюиссана, стр. 354 и 355:

мѣста наблюденій.	длина дугъ параллели.	амплитуды астрономическія.	длина градусовъ долготы.	разности.
	метр.		мет.	м.
Мареннъ	$b_1=$ 74414,96	$T_1=0^ч3^м48^с,990$	77992,87	— 187,55
Сен-Прейель	$b_2=$124194,79	$T_2=$0. 6. 23, 094	77805,32	— 5,39
Сованьякъ	$b_3=$133359,09	$T_3=$0. 6. 51, 391	77799,93	+ 139,56
Юссонъ	$b_4=$233111,08	$T_4=$0.11. 57, 820	77939,49	— 60,82
Женева	$b_5=$236741,47	$T_5=$0.12. 9, 570	77878,67	— 53,42
Миланъ	$b_6=$209279,52	$T_6=$0.10. 45, 383	77825,25	
Падуя.				
цѣлая дуга	D=1011100,91	T=0. 51. 56, 248	77870,60	

Средняя длина градусовъ долготы въ 4-мъ столбцѣ, выведена чрезъ раздѣленіе чиселъ 2-го столбца на соотвѣтствующія имъ амплитуды, выраженныя въ градусахъ и десятичныхъ доляхъ. Еслибы въ мѣстахъ наблюденій отвѣсныя линіи не уклонялись отъ направленія нормалей, или что то-

же, еслибы земля имѣла видъ правильнаго эллипсоида вращенія, то частныя $\frac{b_1}{T_1}$, $\frac{b_2}{T_2}$, $\frac{b_3}{T_3}$,……. были бы одинаковы; но какъ здѣсь это не выполняется, то означимъ чрезъ ε_1, ε_2, ε_3….. погрѣшности въ величинахъ T_1, T_2, T_3…, происходящія отъ совокупнаго уклоненія отвѣсныхъ линій и погрѣшностей наблюденія, а чрезъ $\frac{1}{\alpha}$ искомую длину градуса долготы. Слѣд. $T_1+\varepsilon_1$, $T_2+\varepsilon_2$…. выразятъ во времени истинныя амплитуды дугъ b_1, b_2, b_3……, а $\frac{T_1+\varepsilon_1}{240}$, $\frac{T_2+\varepsilon_2}{240}$,…. величину ихъ въ градусахъ, (ибо $4^{\text{мин.}}$ или $240^{\text{сек.}}$ во времени соотвѣтствуютъ дугѣ въ 1°, количества же T_1, T_2,… предполагаемъ выраженными въ секундахъ времени), и потому получатся слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} b_1\alpha - \frac{T_1}{240} &= \frac{\varepsilon_1}{240} \\ b_2\alpha - \frac{T_2}{240} &= \frac{\varepsilon_2}{240} \\ b_3\alpha - \frac{T_2}{240} &= \frac{\varepsilon_3}{240} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

Поступая съ сими уравненіями по способу наименьшихъ квадратовъ, найдемъ для вѣроятнѣйшей величины градуса параллели:

$$\frac{1}{\alpha} = D_m = \frac{240(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots\dots\dots)}{b_1T_1+b_2T_2+b_3T_3+\dots\dots}$$

Послѣ чего подставя эту величину въ предшествующія уравненія получатъ величину погрѣшностей ε_1, ε_2, ε_3,…. отдѣльныхъ амплитудъ, а сумма $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+$….. выразитъ поправку, которую слѣдуетъ ввести въ полную амплитуду $T_1+T_2+T_3+$…..

Здѣсь вычисленіе величины $\frac{1}{\alpha}$ очевидно будетъ, тѣмъ сложнѣе, чѣмъ число условныхъ уравненій болѣе. Но это дѣйствіе

значительно сократится, если положимъ $\frac{1}{\alpha}=\beta+x=\beta\left(1+\frac{x}{\beta}\right)$, и возьмемъ для β величину весьма мало разнствующую отъ вѣроятнѣйшей, при какомъ условіи, количество x будетъ весьма малое, такъ что безъ значительной погрѣшности, можно отбросить 2-ю его степень въ выраженіи

$$\alpha=\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-1}=\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{x}{\beta}\right).$$

Вышепредложенныя условныя уравненія, отъ внесенія сей величины вмѣсто α, обратятся въ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{240.b_1}{\beta}-T_1-\frac{240.b_1}{\beta^2}.x=\varepsilon_1\\ \frac{240.b_2}{\beta}-T_2-\frac{240.b_2}{\beta^2}.x=\varepsilon_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

или для сокращенія изобразивъ сумму двухъ первыхъ членовъ каждаго изъ сихъ уравненій чрезъ m_1, m_2,.... а коефиціенты 3-хъ членовъ чрезъ n_1, n_2.... получимъ

$$m_1-n_1x=\varepsilon_1,\quad m_2-n_2x=\varepsilon_2,\ldots.$$

откуда по способу наименьшихъ квадратовъ, найдемъ

$$x=\frac{m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3+\ldots..}{n_1^2+n_2^2+n_3^2+\ldots\ldots.}$$

Такова величина поправки, которую слѣдуетъ придать къ β для опредѣленія вѣроятнѣйшей длины градуса параллели.

Примѣняя все нами вышеизложенное къ числамъ таблицы помѣщенной на стр. 90, т. е. принимая среднюю ариѳметическую величину 4-го столбца, т. е. 77870,60 за количество β, и подставя вмѣсто b и T соотвѣтствующія имъ величины, произойдутъ слѣдующія условныя уравненія:

$$\begin{array}{l}+0{,}359-0{,}002945.x=\varepsilon_1,\\ -0{,}321-0{,}004915.x=\varepsilon_2,\\ -0{,}374-0{,}005278.x=\varepsilon_3,\\ +0{,}636-0{,}009213.x=\varepsilon_4,\\ +0{,}075-0{,}009370.x=\varepsilon_5,\\ -0{,}376-0{,}008283.x=\varepsilon_6\end{array}$$

отсюда получимъ $x = + 3^{м},16$, а слѣд. $\beta + x = D_m = 77873,76$ метр.; внеся же эту величину x въ условныя уравненія, найдемъ

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= + 0^{с},350 \\ \varepsilon_2 &= - 0,337 \\ \varepsilon_3 &= - 0,391 \\ \varepsilon_4 &= + 0,607 \\ \varepsilon_5 &= + 0,045 \\ \varepsilon_6 &= - 0,402 \\ \text{сумма} &= - 0,128 \end{aligned}$$

что выражаетъ во времени поправку для полной амплитуды измѣренной дуги $T = 0^{ч}\,51^{м}\,56^{с},248$ между Маренъ и Падуею, которая слѣд. будетъ $= 0^{ч}\,51^{м}\,56^{с},12$ во времени или $P = 12^{\circ}\,51'\,1'',8$ въ дугѣ.

§ 434. Выведенная нами теперь величина $D_m = 77873,76$, представляетъ длину градуса параллели подъ широтою $\lambda = 45^{\circ}\,43'\,12''$ на поверхности эллипсоида вращенія, соприкасающагося съ поверхностію земнаго сфероида. Для опредѣленія сжатости сего эллипсоида подставимъ въ формулу (8) эти величины P и D, а вмѣсто S, u и U данныя доставленныя градуснымъ измѣреніемъ между Дюнкирхеномъ и Форментерою, именно:

$$S = 1423885,16 \text{ метр.}$$

широта Дюнкирхена $\varphi = 51^{\circ}\,28'\,40'',00$

» Форментеры $\varphi' = 38.\,39.\,56.\,11$

амплитуда $u = 12.\,48.\,43,\,89 = 12^{\circ},8121917$

$\varphi + \varphi' = U = 90.\;\; 8.\,36,\,11;$

отсюда для средней величины градуса меридіана, найдемъ

$$\frac{S}{\varphi - \varphi'} = S_m = 111131,23 \text{ метр.}, \;\; \log S_m = 5.0458361.$$

Вотъ ходъ вычисленія по формулѣ (8):

$$\begin{array}{llll} S_m \ldots . 5.0458361- & & & \\ \cos\lambda \ldots . 9.8439583 & & D_m = & 77873,76 \\ \overline{4.8897944-} & \ldots . & S_m\cos\lambda = & -77581,79 \\ & & \text{числит.} = & 291,97 = a \end{array}$$

$D_m \ldots\ldots 4.8913911$

$\frac{135}{\pi} \ldots\ldots 1.6331839$

$\frac{\sin u . \cos U}{u} \ldots 5.6364761 - \quad \frac{1}{4} D_m = +19468,44$

$2.1610511 - \ldots\ldots\ldots - 144,89$

$\frac{1}{2} \ldots\ldots \overline{1}.6989700$

$S_m \cos\lambda \ldots\ldots 4.8897944$

$\sin^2\lambda \ldots\ldots 9.7097490$

$4.2985134 \ldots\ldots\ldots +19884,44$

знаменат. $= +39207,99 = b$

$\log a = 2.4653382$

$\log b = 4.5933747$

$\log e^2 = \overline{3}.8719635$

$\log \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4} e^2) = \overline{1}.6997594$

$\log \mu = \overline{3}.5717229$

доп. $\log \mu = 2.4282771$

сжатіе $\mu = \frac{1}{268,08}$

Такова величина сжатости, получаемая изъ урав (8). Она опредѣлится съ строжайшею точностію, если введемъ въ вычисленіе отбрасываемый членъ въ урав. (7), и получимъ: $\log T = \overline{1}.4362408$, $\log T' = \overline{2}.9935293 -$; послѣ чего величина послѣдняго члена въ урав. (7) будетъ $= +0,0000409$; $\log e^2 = \overline{3}.8695720$, и наконецъ истинная величина сжатости эллипсоида вращенія $\mu = \frac{1}{269,56}$.

ГЛАВА VI.

О контролѣ и исправленіи результатовъ дѣйствій геодезическихъ.

§ 435. Въ геодезическихъ дѣйствіяхъ, производимыхъ на обширномъ пространствѣ, всегда измѣряютъ нѣсколько базисовъ и опредѣляютъ астрономическими наблюденіями географическую широту и долготу многихъ точекъ сѣти съ

тою цѣлію, чтобы не происходило накопленія погрѣшностей. При сличеніи измѣренной длины какого либо базиса съ длиною его вычисленною съ другаго базиса, или при сличеніи широты и долготы точекъ, опредѣленныхъ астрономически, съ результатами вычисленій, сдѣланныхъ послѣдовательно отъ другихъ данныхъ пунктовъ (см. гл. I и гл. III), всегда оказываются болѣе или менѣе значительныя разности. Эти разности впрочемъ бываютъ гораздо ничтожнѣе въ длинѣ линій нежели въ географическомъ положеніи пунктовъ. На прим. во Франціи измѣрено было семь базисовъ, и съ нихъ составлены были три сѣти треуг-въ 1-го разряда по направленію меридіановъ и пять сѣтей по направленію параллелей. Каждый изъ этихъ измѣренныхъ базисовъ далъ разности самыя маловажныя, ибо наибольшая разность не превышала 1,82 метра. Она оказалась въ основаніи, находящимся при Перпиньянѣ (близь Пиринейскихъ горъ) и вычисленнымъ съ основанія измѣреннаго при Мелюнѣ (между Парижемъ и Фонтенебло).

Геодезическія дѣйствія, произведенныя у насъ въ Россіи представляютъ еще большее согласіе въ длинѣ линій; такъ на прим. въ треангуляціи составленной подъ руководствомъ г. генерала Шуберта, съ базиса, измѣреннаго въ окрестностяхъ Петербурга, вычислены были два другія, близь Ильменя озера и близь мѣстеч. Освея (въ Витебс. губерн.), и оказалось что

	по вычисл.	*по измѣр.*	*разн.*
длина 1-го....	4136,5486 саж.	4136,5547 (*)	0,0061 саж.
2-го....	5226,3134 »	5225,7887	0,5247 »

Подобное же согласіе въ длинѣ линій встрѣчаемъ въ треангуляціи, составленной г. генераломъ Теннеромъ, также какъ и въ длинѣ общихъ боковъ, соединявшихъ треангуляцію г. академика Струве съ треангуляціями генераловъ Шуберта и Теннера.

(*) Въ позднѣйшее время тотъ же базисъ былъ вычисленъ съ базиса измѣреннаго на Ходынскомъ полѣ (въ окрестностяхъ Москвы) и длина его найдена была въ 4136,75 саж. Не должно забывать что разстояніе между сими базисами болѣе 500 верстъ!!.

Не взирая на такую точность, широты и долготы точекъ сѣти и азимуты ея боковъ, полученныя сперва чрезъ вычисленія, а потомъ чрезъ астрономическія наблюденія не согласовались между собою столь удовлетворительно, какъ длины боковъ, ибо во Франціи разности въ широтахъ достигали до 7 и даже до 9″, разности въ долготахъ до 24″, а разности въ азимутахъ до 34″. Въ треангуляціи Петербургской, Псковской и Новгородской губерній, самая наибольшая разность въ широтахъ не превосходила 5″ а разность долготъ до 2″,24 (на прим. Петербургомъ и Дерптомъ); въ Московской губерніи разность широтъ достигала до 11″ и даже до 14″, что впрочемъ произошло вѣроятно отъ неточности астрономическихъ наблюденій.

§ 436. Большее согласіе оказывающееся въ длинѣ линій, нежели въ географическомъ положеніи точекъ, происходитъ отъ того, что точность вычисленія боковъ треангуляціи зависитъ единственно отъ вѣрнаго измѣренія угловъ треугольниковъ; но не говоря о доведеніи нынѣ угломѣрныхъ инструментовъ и методъ наблюденій до высокаго совершенства, малыя погрѣшности неизбѣжно дѣлаемыя при измѣреніи угловъ, разлагаются въ каждомъ треуг-кѣ на всѣ три угла, чрезъ что вліяніе ихъ на длину опредѣляемыхъ боковъ значительно уменьшается. Между тѣмъ, какъ оказывающіяся разности между астрономическими и геодезическими опредѣленіями широты и долготы пунктовъ происходитъ частію отъ ошибочности астрономическихъ наблюденій, частію же и отъ невѣрности геодезическихъ вычисленій. Мы говоримъ отъ невѣрности геодезическихъ вычисленій не потому, чтобы принятыя формулы, служащія для вычисленія широты и долготы не были достаточно строги, но потому, что постоянныя количества въ нихъ входящія, зависящія отъ принятой гипотезы о величинѣ и фигурѣ земнаго сфероида, могутъ быть ошибочны, или собственно говоря не соотвѣтствующими той части его поверхности, которая покрыта треангуляціею, какъ это будетъ объяснено нами съ большею подробностію.

А.) ИСПРАВЛЕНІЕ БОКОВЪ И УГЛОВЪ ТРЕАНГУЛЯЦІИ.

§ 437. Не взирая на согласіе въ длинѣ линій, вычисленныхъ съ различныхъ базисовъ, какъ видѣли выше, въ дѣйствіяхъ требующихъ строгой точности не пренебрѣгаютъ оказывающимися незначительными разностями, а разлагаютъ ихъ на всѣ промежуточные бока треугольниковъ. Нѣкоторые изъ геодезистовъ съ сею цѣлію перечисляютъ вторично всю треангуляцію разложивъ предварительно погрѣшность въ суммѣ измѣренныхъ трехъ угловъ каждаго треугольника не на всѣ три угла по ровну (см. § 147), но измѣняя болѣе или менѣе тѣ углы, которые казались имъ менѣе заслуживающими довѣрія, какъ на прим. измѣренные при менѣе благопріятномъ состояніи погоды, при большей шаткости мѣста, которое занято было инструментомъ, и проч. Но этотъ пріемъ, какъ зависящій отъ произвола геодезиста не долженъ быть допущенъ въ практикѣ, ибо естественнѣе оказывающуюся разность въ длинѣ общихъ боковъ принимать за результатъ накопленія весьма малыхъ погрѣшностей сдѣланныхъ во всѣхъ углахъ, и потому вводить въ сіи послѣдніе одну и туже поправку слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что исправляемая сѣть состоитъ изъ треуг-въ представленныхъ на чер. 126. Пусть будетъ a базисъ 1-го треуг-ка; A противуположный ему уголъ, исправленный, на основаніи Лежандровой теоремы, третью избытка суммы измѣренныхъ угловъ надъ двумя прямыми; a' общій бокъ соединяющій сей треугольникъ со вторымъ и наконецъ B уголъ прилежащій къ базису a противоположно сторонѣ a' и также исправленный третью избытка; получимъ

$$a' = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

Если такимъ же образомъ означимъ чрезъ A', уголъ противоположный основанію a' во 2-мъ треугольникѣ, чрезъ B' прилежащій уголъ къ сему основанію, и чрезъ a'' бокъ сего треуг-ка соединяющій его съ 3-мъ, то будетъ

$$a'' = \frac{a' \sin B'}{\sin A'}.$$

Вообще, если n есть число всѣхъ треуг-въ сѣти, и $a^{(n)}$ послѣдній изъ опредѣляемыхъ боковъ, то перемноженіе всѣхъ n уравненій, выражающихъ длину искомыхъ боковъ, даетъ

$$a^{(n)}=\frac{a\sin B.\sin B'\ldots\ldots\sin B^{(n-1)}}{\sin A.\sin A'\ldots\ldots\sin A^{(n-1)}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Предположимъ теперь, что этотъ бокъ $a^{(n)}$ непосредственно измѣренъ, и длина его оказалась равною α, избыточествующею надъ вычисленною $a^{(n)}$ количествомъ $\varepsilon^{(n)}$, т. е.

$$\alpha=a^{(n)}+\varepsilon^{(n)}.$$

Если измѣреніе линіи примемъ за математически точное, то количество $\varepsilon^{(n)}$ выразитъ накопленіе погрѣшностей въ длинѣ линій $a', a'', \ldots a^{(n)}$, отъ погрѣшностей, сдѣланныхъ въ углахъ A, A′, ... B, B′, B″.... Но какъ ко всѣмъ этимъ угламъ можно имѣть почти одинаковое довѣріе, то прилично будетъ ввести въ нихъ общую поправку, а именно: углы A, A′.... уменьшить, а углы B, B′.... увеличить однимъ и тѣмъ же количествомъ x, на столько, чтобы 1-я часть урав. (1) обратилась въ $a^{(n)}+\varepsilon^{(n)}$, т. е.

$$\alpha=a^{(n)}+\varepsilon^{(n)}=\frac{a\sin(B+x)\sin(B'+x)\ldots\ldots\sin(B^{(n-1)}+x)}{\sin(A-x)\sin(A'-x)\ldots\ldots\sin(A^{(n-1)}-x)}.$$

Это уравненіе, по разложеніи синусовъ обратится въ

$$a^{(n)}\left(1+\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}\right)=\frac{a\sin B.\sin B'\ldots(1+x\sin 1''\cot B)(1+x\sin 1''\cot B')\ldots}{\sin A.\sin A'\ldots(1-x\sin 1''\cot A)(1-x\sin 1''\cot A')\ldots}$$

Сокративъ съ помощію урав. (1), а потомъ взявъ логариѳмы обѣихъ частей и по причинѣ, что

$$\log\left(1+\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}\right)=M\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}},$$

$$\log(1+x\sin 1''\cot B)=Mx\sin 1''\cot B,$$

(гдѣ M=0,43429.... есть табличный модуль), получимъ

$$\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}}=x\sin 1''[\cot A+\cot A'+\ldots\cot A^{(n-1)}+\cot B+\cot B'+\ldots$$
$$\cot B^{(n-1)}\ldots]\ldots\ldots (2)$$

И такъ, когда съ базиса a вычисленъ былъ другой базисъ, длина коего по измѣренію оказалась равною α, а по вычисленію $a^{(n)}$, то сперва опредѣлятъ погрѣшность $\varepsilon^{(n)}$ изъ

выраженія $\varepsilon^{(n)} = \alpha - a^{(n)}$; потомъ подставя ее въ урав. (2) найдутъ для угловъ поправку x, которая получится со знакомъ $+$, если $\alpha > a^{(n)}$, и со знакомъ $-$, если $\alpha < a^{(n)}$. Для исправленія потомъ длины одного изъ промежуточныхъ боковъ, на прим. 5-го, достаточно въ урав. (2) положить $n=5$, и подставя вмѣсто x найденную величину, опредѣлить количество ε^{v}, которое въ семъ случаѣ выразитъ искомую поправку для бока a^{v}. Когда же поправка $\varepsilon^{(m)}$ для какого нибудь бока $a^{(m)}$ будетъ найдена, тогда

$$\text{исправленный } \log a^{(m)} = \text{вычислен. } \log a^{(m)} + \mathrm{M} \cdot \frac{\varepsilon^{(m)}}{a^{(m)}}.$$

Если треуг-ки сѣти мало различествуютъ отъ равносторонних, то безъ значительной погрѣшности можно сумму котангенсовъ положить $2n \cdot \cot 60°$; тогда урав. (2) обратится въ

$$x = \frac{\varepsilon^{(n)} \tan 60°}{2n \cdot a^{(n)} \sin 1''}.$$

§ 438. Изложенный нами теперь способъ исправленія угловъ и боковъ треангуляціи, соединяющей одинъ базисъ съ другимъ, легко примѣняется къ тому случаю, когда сѣть треуг-въ раздѣляется на двѣ вѣтьви, соединяющіяся въ послѣдствіи общимъ бокомъ. Такъ какъ для длины сего послѣдняго получатся изъ обѣихъ сѣтей двѣ различныя величины весьма мало разнствующія между собою, на прим. $a^{(n)}$ и $a^{(m)}$ то за истинную длину сего бока обыкновенно принимаютъ среднюю, т. е. $\alpha = \frac{1}{2}(a^{(n)} + a^{(m)})$. И такъ, если поправку въ углахъ одной сѣти, состоящей изъ n треуг-въ означимъ чрезъ x, а поправку для другой состоящей изъ m треуг-въ чрезъ y, то x найдется изъ урав. (2), а для опредѣленія y, достаточно въ ту же формулу подставить y вмѣсто x, и m вмѣсто n.

§ 439. При производствѣ геодезическихъ дѣйствій весьма часто случается, что треугольники располагаются не въ видѣ ряда представленнаго на чер. 126, но образуютъ въ совокупности фигуру многоугольника MNOPQ.... (чер. 220), котораго одинъ изъ боковъ, на прим. $\mathrm{MN} = c$ служитъ даннымъ базисомъ, и начиная съ треуг-ка MNC вычисляютъ послѣдовательно сперва треуг-ки NOC, OCP.... до QRC, а

потомъ треуг-ки CMT, CTS.... до QRC. Такимъ образомъ для бока $QR = \alpha$ служащаго новымъ базисомъ дальнѣйшей сѣти треуг-въ, получаются двѣ величины $c^{(n)}$ и c_m. Рождается вопросъ какимъ образомъ исправить всѣ углы такъ, чтобы обѣ системы треуг-въ давали для длины бока α одну и туже величину.

Условимся означать длину линій CN, CO, CP.... въ первой системѣ треуг-въ чрезъ a', a'', a'''...., а длину линій CM, CT, CS.... чрезъ a_1, a_2, a_3.... Если положимъ, что послѣдній треуг. QCR въ 1-й системѣ есть n-й, то бокъ CQ будетъ $a^{(n-1)}$, а если тотъ же треуг. во 2-й системѣ есть m-й то бокъ CR будетъ a_{m-1}. Очевидно, что при этомъ означеніи, число всѣхъ треуг-въ изъ коихъ составленъ многоугольникъ есть $m + n - 2$. Условимся далѣе въ 1-й системѣ треуг-въ, углы противуположные бокамъ $a', a'', a''' \ldots a^{(n-1)}$ означать чрезъ $A', A'', A''', \ldots A^{(n-1)}$, а углы прилежащіе къ симъ бокамъ начиная со 2-го чрезъ $B'', B''', \ldots B^{(n-1)}$; также во 2-й системѣ углы противулежащіе бокамъ $a_1, a_2, a_3 \ldots$ означать чрезъ $B_1, B_2, B_3 \ldots B_{m-1}$, а углы прилежащіе къ онымъ чрезъ $A_2, A_3, \ldots A_{m-1}$. Такимъ образомъ въ 1-мъ треуг-кѣ NMC углы прилежащіе къ основанію c означатся чрезъ A' и B_1, а въ послѣднемъ QRC чрезъ A_m и $B^{(n)}$.

Но прежде нежели приступимъ къ рѣшенію нашего вопроса (извѣстнаго въ Геодезіи подъ именемъ *вычисленія полигоновъ*), должно упомянуть, что до вычисленія треуг-въ составляющихъ данный многоугольникъ, надобно предварительно исправить ихъ углы такъ, чтобы во 1-хъ) въ каждомъ изъ треуг-въ сумма угловъ $A + B + C = 180° + \varepsilon$ (означая чрезъ ε сферич. его избытокъ) и во 2-хъ) сумма угловъ около общей вершины C составляла 360°. Для выполненія 1-го изъ сихъ условій надобно поступить какъ объяснено въ § 147, т. е. опредѣливъ сферич. избытокъ ε въ каждомъ треуг-кѣ и вычтя $180° + \varepsilon$ изъ суммы угловъ $A + B + C$, треть оказавшейся разности y, принимаемой за сумму погрѣшностей наблюденій, вычесть изъ каждаго угла. Еслибы $A - \frac{1}{3}y$, $B - \frac{1}{3}y$, $C - \frac{1}{3}y$, дѣйствительно выражали истинную величину сфер. угловъ, то сумма прилежащихъ къ точкѣ C угловъ во всѣхъ треуголь-

никахъ, составила бы 360°. Но какъ въ практикѣ по большей части оказывается эта сумма равною $360°+t$, то для вторичнаго исправленія угловъ должно раздѣлить t на число $n+m-2$ треугольниковъ $\frac{t}{m+n-2}$ и частное вычесть во всякомъ тре-уг-кѣ изъ угла C, а $\frac{t}{2(m+n-2)}$ приложить къ A и B (*) для того, чтобы равенство $A+B+C=180°+\varepsilon$ не нарушилось. По окончательномъ исправленіи такимъ образомъ всѣхъ угловъ, на основаніи Лежандровой теоремы, треть сферич. избытка вычтутъ изъ каждаго сфер. угла, и потомъ рѣшатъ распрямленный треуг. по правиламъ прямолинейной тригонометріи.

Предположимъ теперь, что A', B_1, C, A'', B'' C'', A_2, B_2, C_2.... (чер. 220) представляютъ величину такимъ образомъ найденныхъ распрямленныхъ треугольниковъ. Изъ 1-й системы треу-гвъ NMC, NCO, OCP... получимъ

$$a'=\frac{c\sin A'}{\sin C},\ a''=\frac{a'\sin A''}{\sin B''},\ a'''=\frac{a''\sin A'''}{\sin B'''}\ldots c^{(n)}=\frac{a^{(n-1)}\sin C^{(n)}}{\sin B^{(n)}}\ldots(3)$$

Перемноженіе сихъ уравненій даетъ

$$c^{(n)}=\frac{c.\sin C^{(n)}}{\sin C}\cdot\frac{\sin A'}{\sin B''}\cdot\frac{\sin A''}{\sin B'''}\cdots\frac{\sin A^{(n-1)}}{\sin B^{(n)}}\cdots\cdots(4).$$

Также изъ треуг-въ 2-й системы имѣемъ

$$a_1=\frac{c\sin B_1}{\sin C},\ a_2=\frac{a_1\sin B_2}{\sin A_2},\ a_3=\frac{a_2\sin B_3}{\sin A_3},\ldots c_m=\frac{a_{m-1}\sin C_m}{\sin A_m},$$

а произведеніе сихъ уравненій будетъ

$$c_m=\frac{c\sin C_m}{\sin C}\cdot\frac{\sin B_1}{\sin A_2}\cdot\frac{\sin B_2}{\sin A_3}\cdots\frac{\sin B_{m-1}}{\sin A_m}\cdots\cdots\cdots(5).$$

Очевидно, что еслибы $c^{(n)}$ получилось равнымъ c_m, то это послужило бы признакомъ, что входящіе въ вычисленіе углы имѣютъ математическую точность. Но какъ этого почти ни-

(*) Само собою разумѣется, что если t получится со знакомъ —, то $\frac{t}{m+n-2}$ приложатъ къ угламъ при центрѣ, а половину сей величины вычтутъ изъ двухъ другихъ въ каждомъ треуг-кѣ.

когда не случается, то положимъ $c^{(n)} > c_m$, и означимъ истинную длину бока QR чрезъ α, а соотвѣтствующія поправки чрезъ $y^{(n)}$ и y_m, т. е. $\alpha = c^{(n)} - y^{(n)}$, $\alpha = c_m + y_m$. Для опредѣленія такой поправки угловъ, чтобы $c^{(n)}$ въ урав. (4) уменьшилось на количество $y^{(n)}$, очевидно надлежитъ углы A' A'', ... $A^{(n-1)}$ уменьшить, а углы B'', B''', ... $B^{(n)}$ увеличить на тоже количество, ибо въ противномъ случаѣ сумма угловъ въ каждомъ треугольникѣ измѣнилась бы. Такимъ же образомъ, дабы c_m въ урав. (5) обратилось въ $c_m + y_m$, надлежитъ углы B_1 B_2..B_{m-1} увеличить, а углы A_2, A_3 ... A_m уменьшить. Изобразивъ сію искомую поправку для угловъ чрезъ x, урав. (4) обратится въ

$$c^{(n)} - y^{(n)} \text{ или } \alpha = \frac{c \sin C^{(n)}}{\sin C} \cdot \frac{\sin(A' - x)}{\sin(B'' + x)} \cdot \frac{\sin(A'' - x)}{\sin(B''' + x)} \cdots \frac{\sin(A^{(n-1)} - x)}{\sin(B^{(n)} + x)}$$

Развернувъ синусы, и какъ вообще $\sin(A - x) = \sin A(1 - x \cot A)$, $\sin(B + x) = \sin B(1 + x \cot B)$, (гдѣ x есть длина дуги выраженная въ частяхъ радіуса принятаго за единицу), то по сокращеніи съ помощію урав. (4) получимъ

$$\alpha = c^{(n)} \frac{(1 - x \cot A')(1 - x \cot A'') \ldots (1 - x \cot A^{(n-1)})}{(1 + x \cot B'')(1 + x \cot B'') \ldots (1 + x \cot B^{(n)})} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Такимъ же образомъ поступая съ урав. (5), т. е. введя сперва поправку x въ углы B_1, B_2 ... A_2, A_3 ..., а потомъ развернувъ синусы и сокративъ съ помощію урав. (5) окончательно найдемъ

$c_m + y_m$ или $\alpha =$

$$c_m \cdot \frac{(1 + x \cot B_1)(1 + x \cot B_2) \ldots\ldots (1 + x \cot B_{m-1})}{(1 - x \cot A_2)(1 - x \cot A_3) \ldots\ldots (1 + x \cot A_m)} \ldots\ldots\ldots (7)$$

По равенству первыхъ частей обоихъ сихъ уравненій имѣемъ

$$\frac{c^{(n)}}{c_m} = \frac{(1 + x \cot B_1) \ldots (1 + x \cot B_{m-1})(1 + x \cot B'') \ldots (1 + x \cot B^{(n)})}{(1 - x \cot A') \ldots (1 + x \cot A^{(n-1)})(1 - x \cot A_2) \ldots (1 - x \cot A_m)}$$

Взявъ логариѳмы и какъ по малости x, $\log(1 \pm x \cot \theta) = \pm M x \sin 1'' \cot \theta$, (гдѣ M есть модуль, а x означаетъ секунды), то получимъ

$$\log c^{(n)} - \log c_m = M x \sin 1'' \left\{ \begin{array}{l} \cot A' + \cot B_1 + \cot A'' + \cot B'' + \ldots\ldots \\ + \cot A_2 + \cot B_2 + \cot A_3 + \cot B_3 + \ldots\ldots \\ + \cot A^{(n-1)} + \cot B^{(n-1)} \\ + \cot A^{(n)} + \cot B_m \end{array} \right\}$$

откуда

$$x = \frac{\log c^{(n)} - \log c_m}{M \sin 1''.\Sigma(\cot A + \cot B)} \dots\dots\dots\dots\dots (8).$$

здѣсь $\Sigma(\cot A + \cot B)$ означаетъ сумму котангенсовъ всѣхъ угловъ. Поправка x получится со знакомъ $+$ если $c^{(n)} > c_m$, и со знакомъ — если $c^{(n)} < c_m$.

И такъ, по опредѣленіи величины x изъ урав. (8), вычтутъ ее изъ угловъ A, т. е. лежащихъ влѣво, (глядя изъ средины каждаго треуг-ка), и приложатъ ее къ угламъ B, т. е. лежащимъ вправо. Послѣ того для опредѣленія искомой длины бока a, поступятъ съ урав. (6), какъ сказано въ § 437, т. е. возьмутъ логариѳмъ сего уравненія и по сокращеніи получатъ:

$$\log a = \log c^{(n)} - Mx \sin 1'' \begin{bmatrix} \cot A' + \cot A'' + \dots \cot A^{(n-1)} \\ + \cot B'' + \cot B''' + \dots \cot B^{(n)} \end{bmatrix} \dots (9)$$

Такимъ же образомъ урав. (7) даетъ

$$\log a = \log c_m + Mx \sin 1'' \begin{bmatrix} \cot B_1 + \cot B_2 \dots\dots \cot B_{m-1} \\ + \cot A_2 + \cot B_3 \dots\dots \cot B_m \end{bmatrix} \dots (10).$$

Еслибы потомъ потребовалось исправить вычисленныя длины линій $a', a'', a''' \dots$ или $a_1, a_2, a_3 \dots$ то искомыя поправки для ихъ логариѳмовъ получились бы изъ урав. (3) и (4), а именно:

для $\log a'$ поправка $= -Mx \sin 1'' \cot A'$

» $\log a''$ » $= -Mx \sin 1''[\cot A' + \cot A'' + \cot B'']$

. . . .

» $\log a_1$ » $= + Mx \sin 1'' \cot B_1$

» $\log a_2$ » $= + Mx \sin 1''[\cot B_1 + \cot A_2 + \cot B_2]$

. . . .

Наконецъ поправки логариѳмовъ вычисленныхъ боковъ разсматриваемаго многоугольника получатся изъ уравненій (9) или (10), подставя въ нихъ вмѣсто n или m, число, выражающее номеръ того треугольника, въ который входитъ исправляемый бокъ. На прим. если желаютъ исправить въ 1-й

системѣ треуг-въ 3-й бокъ, то въ урав. (9) положать $n=3$, и будетъ

исправл. $\log c''' = \log c''' - Mx\sin 1''[\cot A' + \cot A'' + \cot B'' + \cot B'''];$

а если исправляемый бокъ находится въ 4-мъ треуг-кѣ 2-й системы, то урав. (10), положивъ $m=4$, даетъ

исправл. $\log c_4 = \log c_4 + Mx\sin 1''\left[\begin{array}{l}\cot B_1 + \cot B_2 + \cot B_3 \\ \quad + \cot A_2 + \cot A_3 + \cot A_4\end{array}\right]$

Предложенный нами теперь способъ исправленія многоугольниковъ замѣчателенъ по простотѣ своего дѣйствія и по своей общности. Вычисленія поправокъ значительно сокращаются съ помощію таблицы натуральныхъ котангенсовъ, вводя ихъ съ пятью и даже съ четырьмя десятичными знаками.

В) ИСПРАВЛЕНІЕ ГЕОГРАФИЧЕСКАГО ПОЛОЖЕНІЯ ТОЧЕКЪ СѢТИ.

§ 110. Когда тригонометрическою сѣтью, состоящею изъ одного ряда треугольниковъ, соединены два отдаленные пункта, которые опредѣлены астрономически *съ одинаковою точностію*, и когда широту одного изъ нихъ съ азимутомъ бока приняли за данные, а потомъ чрезъ послѣдовательныя вычисленія опредѣлили географическое положеніе другаго, тогда оказавшуюся разность между наблюденною и вычисленною широтою сего послѣдняго, (также какъ и его долготою и азимутомъ) безъ чувствительной погрѣшности *можно разложить по ровну на всѣ промежуточныя точки.* Такъ на прим. если широта пункта по наблюденію есть l, а по вычисленію l'; число же промежуточныхъ треугольниковъ между сею точкою и другою, съ коей вычисленіе начато есть n, то положивъ разность $l - l' = \Delta$, раздѣлять Δ на n; и частное $\frac{\Delta}{n}$ приложать къ широтѣ каждой изъ промежуточныхъ точекъ. Такимъ же образомъ поступять съ разностію оказавшеюся въ долготѣ и азимутѣ. Но повторяемъ, что

этотъ способъ исправленія погрѣшностей въ томъ только случаѣ будетъ безошибоченъ, когда оба данные пункта опредѣлены съ одинаковою степенью точности, т. е. изъ равнаго числа наблюденій, однимъ и тѣмъ же инструментомъ и при одинаково благопріятныхъ обстоятельствахъ.

§ 441. Нѣкоторые изъ геодезистовъ совѣтуютъ поступать такимъ же образомъ при исправленіи географ. положенія пунктовъ въ томъ случаѣ, когда обширное пространство земной поверхности покрывается сплошною треангуляціею, или когда одинокій рядъ треугольниковъ, расположенныхъ вдоль меридіана соединяется поперечными сѣтями. Такъ на прим. предположимъ (чер. 222), что A и B, C и D, E и F, суть астрономическія точки, и что начиная сперва отъ A вычислено было географическое положеніе точекъ сѣти AB, а потомъ отъ точки C географ. положеніе точекъ сѣти CD. Если положимъ далѣе, что для точки B разница между наблюденною и вычисленною широтою изъ треангуляціи AB оказалась равною 4″, а для той же точки изъ треангуляціи CMB равною 7″, то исправя вычисленныя широты первой сѣти треугольниковъ какъ объяснено въ предыдущемъ §, принимаютъ исправленную широту точки M соединяющей обѣ сѣти за истинную, и разницу между оною и широтою ея, вычисленною изъ треангуляціи CM, дѣлятъ на число треугольниковъ находящихся между M и C; послѣ чего частное принимаютъ за попрвку для ея точекъ, и т. д.

Чтобы убѣдиться въ неосновательности этого способа исправленія положенія точекъ, достаточно припомнить, что всѣ формулы, посредствомъ коихъ вычисляются широта и долгота точекъ сѣти и азимуты ея боковъ выведены при томъ предположеніи, что земная поверхность имѣетъ видъ правильнаго эллипсоида вращенія. Еслибы она дѣйствительно имѣла таковый видъ, и извѣстны были съ точностію его сжатость и длина полуоси, то широты и долготы точекъ треангуляціи опредѣлились бы съ математическою строгостію и вполнѣ согласовались бы съ результатами астрономическихъ наблюденій, предполагая ихъ исполненными безъ всякихъ погрѣшностей. Въ практикѣ при вычисленіи широты и

долготы, вводится въ вышесказанныя формулы сжатость и длина полуоси того эллипсоида, который наиболѣе согласуется со всѣми градусными измѣреніями (см. § 186) и такимъ образомъ предполагается, что всѣ точки треангуляціи, безъ измѣненія длины боковъ треуг-въ и величины ихъ угловъ перенесены на поверхность этого умственнаго эллипсоида. Если бы сей послѣдній былъ соприкасающимся во всѣхъ точкахъ пространства занимаемаго тригоном. сѣтью, или что все равно отвѣсныя линіи были бы дѣйствительными нормалями этого эллипсоида, то вычисленныя широты и долготы равнялись бы съ наблюденными. Но извѣстно, что земная поверхность въ строгомъ смыслѣ не имѣетъ видъ эллипсоида вращенія будучи сфероидомъ неправильнымъ, а потому, чтобы вычисленныя широты и долготы ни сколько не разнствовали отъ наблюденныхъ, надлежало бы для каждой отдѣльной части страны, образующей особую выпуклость, вообразить себѣ эллипсоидъ вращенія съ нею наиболѣе соприкасающійся, и вводить сжатость и длину его полуоси въ формулы при вычисленіи широты и долготы ея точекъ. По невозможности исполнить этого, (ибо неизвѣстно гдѣ именно земная поверхность имѣетъ особенную выпуклость и какую форму имѣетъ сія послѣдняя), единственнымъ средствомъ для рѣшенія нашего вопроса остается взять эллипсоидъ вращенія, болѣе прочихъ соприкасающійся не съ каждою отдѣльною выпуклостію, но *со всемъ пространствомъ*, покрытымъ треангуляціею и его уже сжатость вводить въ вышесказанныя формулы.

Но размѣры и сжатость эллипсоида вращенія, соприкасающагося съ какою либо частію земной поверхности, какъ извѣстно (см. § 430) выводятся изъ градусныхъ измѣреній дуги меридіана и дуги параллели; а потому заключаемъ, что для приведенія въ согласіе вычисленныхъ широтъ и долготъ точекъ сѣти съ наблюденными, должно въ той странѣ, которая покрывается тригон. сѣтью, произвести два градусныхъ измѣренія: одно по направленію меридіана, а другое по направленію параллели, и преимущественно пролегающей чрезъ средину снимаемой страны. Выведя сжатость и длину полу-

оси изъ обоихъ этихъ градусныхъ измѣреній (см. §§ 432 и 434) ввести ихъ въ формулы, посредствомъ коихъ вычисляется широта и долгота точекъ сѣти, также какъ и азимуты боковъ, или, если эти вычисленія уже исполнены были при иной сжатости, то исправить результаты, какъ объяснено будетъ въ послѣдующемъ §. Если послѣ этого, вычисленныя широты и долготы не будутъ вполнѣ согласоваться съ результатами наблюденій, то оставить сіи послѣдніе безъ вниманія, ибо это разногласіе можетъ происходитъ частію отъ неточности астрономическихъ наблюденій, частію же и отъ мѣстнаго уклоненія отвѣсныхъ линій, производимаго неоднобразнымъ распредѣленіемъ земныхъ пластовъ различной плотности и многими другими неизвѣстными причинами (см. §§ 183—185).

§ 442. Когда по вычисленіи широты и долготы точекъ сѣти при сжатости $=\mu$, найдено было въ послѣдствіи, что сжатость, приличествующая странѣ есть $\mu'=\mu+d\mu$, тогда нѣтъ надобности перечислять всѣ формулы снова, но достаточно прибѣгнуть къ формуламъ, выражающимъ поправку для вычисленныхъ широтъ и долготъ. Выводъ сихъ формулъ есть слѣдующій:

Пусть l и l' будутъ широты и P, P', долготы какихъ либо двухъ точекъ эллипсоида вращенія, коего μ есть сжатость, Q четверть меридіана и A радіусъ экватора. Изобразимъ чрезъ S длину дуги меридіана, заключающейся между параллелями проходящими чрезъ обѣ данныя точки, а чрезъ D длину дуги параллели подъ широтою l, заключающейся между ихъ меридіанами. Урав. (20) въ § 175, (отбросивъ члены заключающіе въ себѣ e^4), въ разсматриваемомъ нами случаѣ обратится въ

$$S=A(1-e^2)\,[\alpha(l'-l)\sin 1''-\beta\sin(l'-l)\cos(l'+l)];$$

но $A(1-e^2)=\dfrac{2Q}{\alpha\pi}$ (см. урав. (25) въ § 179), $\alpha=1+\frac{3}{4}e^2$, $\beta=\frac{3}{4}e^2$,

а слѣд. удерживая лишь члены содержащіе e^2, найдемъ

$$S=\frac{2Q}{\pi}(l'-l)\sin 1''-\tfrac{3}{2}e^2\frac{Q}{\pi}\sin(l'-l)\cos(l'+l).$$

Внеся сюда вмѣсто e^2 его величину $2\mu-\mu^2$ (см. ч. I, стр. 298) и ограничиваясь членами 1-го порядка, получимъ

$$S=\frac{2Q}{\pi}(l'-l)\sin 1''-3\mu.\frac{Q}{\pi}\sin(l'-l)\cos(l'+l).$$

Не должно забывать, что π выражаетъ отношеніе окружности къ своему діаметру, а $l'-l$ въ 1-мъ членѣ, амплитуду дуги въ секундахъ. Если предположимъ, что широта l первой точки съ ея азимутомъ принята была за основаніе при вычисленіи широты l', то съ измѣненіемъ сжатости μ измѣнится также и l' вмѣстѣ съ Q и A. И такъ, принимая l и дугу S за постоянныя, (ибо S опредѣляется непосредственно изъ сѣти треугольниковъ), а l' и Q за перемѣнныя, одифференцируемъ выведенное нами уравненіе и отбрасывая члены заключающіе въ себѣ множителемъ μdl и μdQ, какъ весьма малые, получимъ

$$dl'=\tfrac{3}{2}\frac{d\mu}{\sin 1''}.\sin(l'-l)\cos(l'+l)-\frac{dQ}{Q}(l'-l)\ldots\ldots(11)$$

Опредѣлимъ теперь поправку для долготы: означивъ чрезъ r радіусъ параллели подъ широтою l, длина ея дуги D, коей амплитуда (выраженная въ секундахъ) есть $P'-P$, будетъ

$$D=r\sin 1''.(P'-P)$$

откуда $$P'-P=\frac{D}{r\sin 1''};$$

но уже извѣстно (см. § 166), что $r=N\cos l=A\cos l(1-e^2\sin^2 l)^{-\frac{1}{2}}$; подставя же сюда 2μ вмѣсто e^2, развернувъ и ограничиваясь членами 1-го порядка, получимъ

$$r=\frac{A\cos l}{1-\mu\sin^2 l};$$

послѣ чего будетъ $$P'-P=\frac{D(1-\mu\sin^2 l)}{A\cos l.\sin 1''}.$$

Возьмемъ сперва неперовъ логариѳмъ этого уравненія, а потомъ одифференцируемъ, принимая μ, A и P' за перемѣнныя, отбросимъ члены высшаго порядка и найдемъ

$$\frac{dP'}{P'-P}=-d\mu.\sin^2 l-\frac{dA}{A};$$

Но (см. § 179) $A = \frac{2Q}{\pi}(1 + \frac{1}{2}\mu)$; взявъ же неперовъ логариѳмъ и одифференцировавъ будетъ

$$\frac{dA}{A} = \frac{dQ}{Q} + \tfrac{1}{2}d\mu;$$

слѣд. предшествующее урав. обратится въ

$$dP' = -d\mu(\sin^2 l + \tfrac{1}{2})(P' - P) - \frac{dQ}{Q}(P' - P) \ldots (12).$$

Здѣсь $P' - P$, подобно какъ $l' - l$ въ урав. (11) выражено въ секундахъ.

Наконецъ для опредѣленія какое имѣетъ вліяніе измѣненіе сжатости земли на величину вычисленнаго азимута, вообразимъ себѣ, что изъ точки M (чер. 214), коей широта есть l', опущенъ перпендикуляръ MQ на меридіанъ, проходящій чрезъ другую точку, коей широта есть l, и означимъ широту подошвы сего перпендикуляра чрезъ l_0, а азимутъ сего послѣдняго при M чрезъ z'; формулы (2) и (4) въ §§ 414 и 415, отбрасывая въ нихъ члены высшаго порядка, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, обратятся въ

$$P' - P = \frac{y}{N \sin 1'' . \cos l_0} \quad \text{и} \quad z' = 270° + \frac{y \tan l_0}{N . \sin 1''}$$

отсюда $$z' = 270° + (P' - P)\sin l_0.$$

Дифференцированіе этого уравненія, принимая P и l_0 за постоянныя, даетъ

$$dz' = dP' . \sin l_0,$$

а по исключеніи dP' съ помощію урав. (12), найдемъ

$$dz' = -\left[d\mu . (\sin^2 l + \tfrac{1}{2})(P' - P) + \frac{dQ}{Q}(P' - P)\right]\sin l_0 \ldots (13).$$

гдѣ широта l_0 опредѣляется уравненіемъ

$$\cot l_0 = \cot l' \cos(P' - P)$$

получаемымъ изъ треуг, PQM (чер. 214), въ коемъ уг. $QPM = P' - P$, а бока $PM = 90° - l'$ и $PQ = 90° - l_0$.

И такъ, когда по вычисленіи географическаго положенія точекъ сѣти при сжатости$=\mu$, и принимая четверть меридіана$=Q$, найдено было въ послѣдствіи, что сжатость и

четверть меридіана эллипсоида, приличествующаго странѣ есть $\mu'=\mu+d\mu$ и $Q'=Q+dQ$, то подставя $d\mu$ и dQ, въ вышепредложенныя формулы (11), (12) и (13), первая изъ нихъ дастъ поправку для широты, вторая для долготы, а третья для азимута. Не должно забывать, что при выводѣ оныхъ предполагалось $l'>l$, и $P'>P$ (считая долготы отъ запада къ востоку), а потому, еслибы случилось, что $l'<l$ и $P'<P$, то надлежало бы разности $l'-l$ и $P'-P$ вводить въ вычисленіе со знакомъ —.

§ 443. Уравненія (11), (12) и (13) приводятъ также къ рѣшенію обратнаго вопроса, а именно: *къ опредѣленію* $d\mu$ *и* dQ *по двумъ изъ трехъ количествъ* dl, dP' и dz'. Такимъ образомъ, когда два пункта, соединенные тригонометрическою сѣтью, опредѣлены астрономически съ строгою точностію, и разность между наблюденными и вычисленными величинами l', P' и z', суть dl', dP' и dz', тогда принявъ $d\mu$ и dQ за неизвѣстныя, выведутъ величину ихъ, чрезъ что найдется сжатость и размѣры того эллипсоида, который болѣе прочихъ соприкасается съ поверхностію страны между обоими пунктами.

Объяснимъ это примѣромъ. Въ треангуляціи Московской губерніи посредствомъ астрономическихъ наблюденій, опредѣлена была широта колокольни Ивана Великаго, также какъ и С. Новоселки, и начиная отъ первой изъ сихъ точекъ, чрезъ послѣдовательныя вычисленія найдены были широта и разность долготъ другой, также какъ и азимутъ при ней бока, принимая сжатость $\mu=\frac{1}{302,78}$, $Q=4687093$ саж. Результаты наблюденій и вычисленій были слѣдующія:

астрон. широта *Новоселки*, $l'=56°22'24'',90$
вычисленная » » $56.22.10,73$
разность $dl'=\ +14'',17$

астрон. азимутъ при Новоселки, $z'=99°23'35'',29$
вычисленный » » » $=99.23.46,09$
разность $dz'=\ -10'',80$

вычисленная разность долготъ $P'-P=-0°30'3'',75=-1803'',75$;
астрономическая *широта Ивана Великаго* $l=55°44'51'',56$

Требуется опредѣлить сжатость $\mu'=\mu+d\mu$ и длину четверти меридіана $Q'=Q+dQ$ наиболѣе соприкасающагося эллипсоида. Здѣсь $l'-l=+0°37'33'',34$, $l'+l=112°7'16'',46$. Подставляя сіи числа, также какъ и предложенныя величины dl' и dz', l и $P'-P$ въ формулы (11) и (13), и положивъ для сокращенія $\frac{dQ}{Q}=dq$, получимъ слѣдующія два уравненія:

$$+14'',17=-1272'',78.d\mu-2253'',34.dq,$$
$$-10'',80=+1777,2.d\mu+1501'',9.dq;$$

откуда $d\mu=-0{,}001459$, $dq=-0{,}005531$.

Но по условію $\mu=0{,}003302$;

слѣд. $\mu'=\mu+d\mu=0{,}001843=\frac{1}{542{,}44}$,

а поправка для длины четверти меридіана будетъ

$$dQ=Q.dq=-25612 \text{ саж.}$$

послѣ чего $Q'=4661481$ саж.

Само собою разумѣется, что эти результаты въ томъ только случаѣ имѣли бы строгую точность, когда астрономическія опредѣленія обѣихъ точекъ, были безошибочны; но по не согласію геодезическихъ съ астрономическими широтами всѣхъ вообще точекъ въ Московской треангуляціи можно предполагать ошибочность въ самыхъ наблюденіяхъ.

§ 444. Въ заключеніе остается разсмотрѣть какимъ образомъ исправляются вычисленныя широты и долготы точекъ сѣти, когда широта начальной точки и азимутъ примыкающаго къ ней бока, оказались изъ позднѣйшихъ наблюденій, сдѣланныхъ съ болѣе строжайшею точностію, ошибочными на нѣсколько секундъ.

Пусть A будетъ начальная точка (чер. 208), B вершина одного изъ треуг-въ, и C полюсъ земли, которую въ разсматриваемомъ нами случаѣ можно разсматривать сферическою. Если отъ исправленія азимута, точка B должна перемѣститься въ B′, то всякая другая точка M, соединяемая съ первою перемѣстится въ M′, при чемъ уг. MAM′, равный углу BAB′ выразитъ поправку въ азимутѣ. Рѣшеніе нашего вопроса, очевидно состоитъ въ выводѣ дифференціальныхъ

уравненій сферич. треуг-ка, въ коемъ уг. A есть измѣняющійся, а оба бока его заключающіе, суть постоянные.

Треуг. ABC, коего бока противулежащіе угламъ A, B, C, означимъ чрезъ a, b, c, на основаніи сферич. тригонометріи, даетъ

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a . \sin b . \cos C$$

$$\sin A . \sin c = \sin a \sin C \ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

Если одифференцируемъ два первыя уравненія, принимая A, a и C за перемѣнныя, а b и c за постоянныя, то получимъ

$$da . \sin a = dA . \sin A . \sin b \sin c$$

$$0 = -da . \sin a . \cos b + da \cos a . \sin b \cos C - dC \sin C \sin a \sin b.$$

Выключивъ изъ предпослѣдняго урав. $\sin c$ съ помощію уравненія (m), найдемъ

$$da = dA . \sin b . \sin C$$

а если введемъ эту величину во второе, то будетъ

$$dC = -\cos b\,(1 - \cot a . \tang b . \cos C)\, dA.$$

Предположимъ теперь, что l есть истиная широта точки A; l' приближенная широта точки B; z приближенный азимутъ стороны BA, считаемый на горизонтѣ A и считаемый отъ сѣвера къ востоку до 360°; наконецъ P приближенная разность долготъ точекъ A и B. И такъ, положивъ

$b = 90° - l, a = 90° - l', C = P, A = z, da = -dl', dA = dz$ и $dC = dP$,

обѣ послѣднія формулы обратятся въ

$$dl' = -\cos l \sin P . dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

$$dP' = -\sin l (1 - \tang l' \cot l . \cos P) dz \ldots\ldots (15)$$

После чего истинная широта точки B будетъ $= l' + dl'$

» разность долготъ точекъ A и B... $P + dP$.

Формулу (15) можно приложить къ опредѣленію погрѣшности въ длинѣ измѣряемой дуги параллели отъ вліянія погрѣшности въ азимутѣ при начальной точкѣ сѣти. Такъ на прим. если $l = 44° 30'$ и $l' = 45°$ суть широты западной и восточной оконечностей сѣти, $P = 5°$ разность долготъ между ни-

ми, и $dz=20''$ погрѣшность въ азимутѣ при точкѣ, коей широта есть l, то вычисленіе по формулѣ (15), дастъ $dP=0'',193$. Но если измѣряемая дуга параллели лежитъ подъ 45°, и какъ длина градуса долготы сей дуги $=36950$ саж., а посему длина дуги въ $1''$ будетъ $=10,26$ саж., то произведеніе $10,26\times0,193=1,95$ саж. выразитъ искомую погрѣшность въ ея длинѣ (*). Если же подставимъ тѣ же самыя данныя въ формулу (14), то получимъ $dl'=-1'',243$ (**).

§ 445. Для опредѣленія вліянія погрѣшности въ начальномъ азимутѣ на величину азимута при исправляемой точкѣ, предположимъ, что въ треуг-кѣ ABC (чер. 208) бока b и c суть постоянныя, а уг. A перемѣнный: величина dA выразитъ погрѣшность въ начальномъ азимутѣ, а dB искомую. И такъ, одифференцировавъ уравненіе

$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B,$$

а потомъ подставя въ результатъ вмѣсто $\sin c\cos B$, его величину, взятую изъ того же уравненія, по сокращеніи, найдемъ

$$da\left(\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a}\right)+\sin a\sin c\sin B\,.\,dB=0,$$

что обращается въ

$$da\cos C+dB\sin a\sin C=0;$$

(*) Изъ этого примѣра видимъ, что погрѣшность въ азимутѣ при начальной точкѣ почти во все не имѣетъ вліянія на длину измѣряемой дуги параллели, ибо найденная нами погрѣшность 1,95 саж. въ длинѣ сей послѣдней произошла отъ того предположенія, что данный азимутъ при начальной точкѣ ошибоченъ на $20''$, чего въ геодезическихъ дѣйствіяхъ, исполняемыхъ съ строгою точностію, какъ у насъ въ Россіи, никогда не можетъ случиться.

(**) Вообще должно замѣтить, что погрѣшность въ азимутѣ будетъ имѣть наибольшее вліяніе на долготы точекъ, въ томъ случаѣ, когда треангуляція имѣетъ направленіе отъ сѣвера къ югу, при чемъ если азимутъ слишкомъ великъ, то всѣ точки къ сѣверу лежащія отъ центральной будутъ подвинуты къ востоку, а лежащія къ югу въ противную сторону. Напротивъ вліяніе погрѣшности азимута на широты точекъ будетъ наибольшее въ томъ случаѣ, когда сѣть треуг-въ простирается отъ запада къ востоку, что очевидно.

Но $da = dA . \sin b \sin C$ (см. стр. 112); а посему

$$dB = -dA . \frac{\sin b \cos C}{\sin a}.$$

И такъ, если z есть начальный азимутъ, считаемый отъ сѣвера къ востоку, а z' одинъ изъ вычисленныхъ, находящій-ся на горизонтѣ точки B, то положивъ $A = z$, $B = 360° - z'$, $b = 90° - l$, $C = P$ и $a = 90° - l'$, получимъ

$$dz' = dz . \frac{\cos l . \cos P}{\cos l'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Отсюда видимъ, что z и z' возрастаютъ или уменьшаются въ одно и тоже время.

§ 446. Изслѣдуемъ теперь какое имѣетъ вліяніе погрѣшность широты главной точки сѣти на географ. положеніе прочихъ ея точекъ. Для сего принимая c и A за постоянныя въ треуг-кѣ ABC, и взявъ урав.

$$\sin A . \sin c = \sin a . \sin C,$$

которое одифференцировавъ, получимъ

$$da = -dC . \frac{\tan a}{\tan C}.$$

Поступивъ такимъ же образомъ съ уравненіемъ

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b . \sin c . \cos A,$$

найдемъ $\quad da \sin a = db (\sin b . \cos c - \cos b . \sin c \cos A);$

но какъ множитель во 2-й части по урав. (39) сферич. триг. (см. ч. I, стр. 16), равняется $\sin a . \cos C$, то будетъ

$$da = db . \cos C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Приравнявъ сію величину съ предшествующею, получимъ

$$dC = -db . \sin C . \cot a \ldots\ldots\ldots\ldots (f).$$

Наконецъ, если одифференцируемъ уравненіе

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a . \sin c . \cos B$$

и поступимъ съ результатомъ, какъ объяснено выше, то найдемъ

$$db . \sin b = da \sin b \cos C + dB . \sin a \sin c \sin B;$$

но $\sin c \sin B = \sin b \sin C$, а посему

$$db = da . \cos C + dB . \sin a \sin C;$$

подставя сюда $db.\cos C$ вмѣсто da, по сокращеніи получимъ

$$dB = db.\frac{\sin C}{\sin a} \dots\dots\dots\dots\dots (g)$$

Если введемъ теперь въ уравненія (e), (f) и (g) прежнія означенія, т. е. $b = 90° - l$, $a = 90° - l'$, $C = P$, $dB = -dz'$, то сіи уравненія выразятъ

поправку въ широтѣ $dl' = dl.\cos P \dots\dots\dots\dots\dots (17)$

» » долготѣ $dP = dl.\sin P.\tang l' \dots\dots\dots (18)$

» » азимутѣ $dz' = dl.\frac{\sin P}{\cos l'} \dots\dots\dots\dots\dots (19)$

Объяснимъ примѣромъ: широты и долготы точекъ въ треангуляціи, составленной подъ руководствомъ генерала Шуберта, вычислены были по координатамъ, за начало коихъ принята была академическая обсерваторія въ Петербургѣ, а географ. широта сей послѣдней, (по опредѣленію академика Вишневскаго) $l = 59°56'31''46$. Вычисленіе по координатамъ дало для широты Пулковской обсерваторіи $59°46'20'',42$; но какъ по опредѣленію г. академика Струве, широта Пулковской обсерваторіи найдена была $= 59°46'18'',7$, то происходящая разность $dl = -1'',72$ между наблюденіемъ и вычисленіемъ, можно отнести къ погрѣшности опредѣленія обсерваторіи въ Петербургѣ. Требуется знать на сколько измѣнится широта и долгота какой либо точки треангуляціи, на прим. Свентена (близь Динабурга), широта коей есть $l' = 55°51'51'',76$, а долгота $P = -3°54'41'',32$. Здѣсь предлагаемъ полное вычисленіе:

$dl \dots 0.2355-$	$dl \dots 0.2355-$	$dl \dots 0.2355-$
$\cos P \dots 9.9990$	$\sin P \dots 8.8339-$	$\sin P \dots 8.8339-$
$dl' \dots 0.2345-$	$\tang l' \dots 0.1688$	доп. $\cos l' \dots 0.1509$
	$dP \dots \bar{1}.2382+$	$dz' \dots \bar{1}.2203+$
$dl' = -1'',72$	$dP = +0'',17$	$dz' = +0'',21$

И такъ, исправленная широта *Свентена* $l' = 55°51'50'',04$
» долгота » $P = -3.54.39,50$

ОТДѢЛЕНІЕ V.

ПРОЭКЦІИ КАРТЪ.

—

ГЛАВА I.

Предварительныя понятія.

A.) РАЗЛИЧНЫЕ РОДЫ КАРТЪ.

§ 447. Подъ словомъ *карта,* разумѣютъ вообще изображеніе значительной части земной поверхности съ болѣе или менѣе подробнымъ означеніемъ предметовъ на ней находящихся.

Карты можно раздѣлить на три главные рода: на *географическія, топографическія* и *морскія.*

a.) На *географическихъ картахъ* представляется цѣлое полушаріе, государство, область и т. п., и изображается положеніе главнѣйшихъ предметовъ земной поверхности, какъ то: направленіе рѣкъ, цѣпей горъ, и проч. также границы государствъ, областей.... Города, селенія и т. п. означаются условными знаками. Географическія карты подраздѣляются на *генеральныя* и *подробныя* (называемыя также *спеціальными*), изъ которыхъ послѣднія отличаются отъ первыхъ большею подробностію и точностію.

b.) На *топографическихъ картахъ* изображаются не только всѣ примѣчательные предметы съ соблюденіемъ ихъ вида,

относительной величины и расположенія, но и самый характеръ мѣстности, какъ то: неровности мѣстоположенія, нѣкоторыя свойства почвы, а также и всѣ сообщенія.

Такъ какъ изображеніе страны съ таковыми подробностями не можетъ быть представлено иначе, какъ на картахъ значительной величины, то это обстоятельство, составляя важное неудобство, встрѣчаемое при соображеніяхъ относящихся до цѣлаго края, подало поводъ къ составленію *семитопографическихъ* или *полутопографическихъ* картъ. Малые города и селенія представляются на нихъ условными знаками, подобно какъ на географическихъ, а всѣ прочія подробности, какъ то: пути сообщенія, лѣса, болота и проч. какъ на топографическихъ, съ тѣмъ только различіемъ, что обращается вниманіе не столько на соблюденіе фигуры предметовъ, сколько на выраженіе общаго характера мѣстности (*).

с.) На *морскихъ картахъ* представляется море съ означеніемъ всѣхъ предметовъ важныхъ для мореплавателя, какъ на прим. острововъ, подводныхъ камней, мелей, промѣровъ глубины и проч. Изъ предметовъ, находящихся на материкѣ изображаются лишь тѣ, кои лежатъ близь берега и могутъ быть видимы съ моря. Этого рода карты, подобно географическимъ, подраздѣляются на *генеральныя* и *частныя* (подробныя); на первыхъ представляется какое либо море все вполнѣ, а на вторыхъ его часть болѣе или менѣе значительная.

В.) МАСШТАБЪ.

§ 448. *Масштабомъ* называется отношеніе разстояній между точками на поверхности земли къ ихъ соотвѣтствующимъ на картѣ. Такимъ образомъ, еслибы каждая линія

(*) Если при составленіи карты, принадлежащей къ одному изъ упомянутыхъ разрядовъ, имѣется въ виду изобразить съ бо́льшею подробностію какіе нибудь предметы въ особенности, не обращая вниманія на прочіе, то таковая карта, сообразно съ цѣлію своего назначенія принимаетъ особое наименованіе, какъ то: *гидрографической, горной, лѣсной, почтовой, маршрутной, квартирной, операціонной* или *театра войны* и проч.

мѣстности, была представлена на картѣ въ 20000 разъ меньшемъ видѣ, то масштабъ выразился бы дробью $\frac{1}{20000}$, т. е. имѣющею въ числителѣ единицу, а въ знаменателѣ число означающее самое уменьшеніе.

Предположимъ, что мы имѣемъ предъ собою карту, которой масштабъ намъ извѣстенъ: если измѣримъ долями какой нибудь линейной единицы, разстояніе между двумя произвольными ея точками, и этотъ результатъ умножимъ на знаменатель дроби, которою выражается масштабъ, то произведеніе будетъ равно разстоянію (въ тѣхъ же единицахъ) между соотвѣтствующими точками въ природѣ. Такъ на прим. если масштабъ карты есть $\frac{1}{10000}$, а длина линіи на картѣ оказалась равною 1 футу, то соотвѣтствующее разстояніе въ природѣ будетъ 10000 фут.; также линія на картѣ въ 0,1 фута, выразитъ линію въ 1000 футъ; 0,01 фута въ 100 футъ; 0,04 фута въ 40 футъ и т. д. Вообще, если масштабъ карты есть $\frac{1}{M}$, а измѣренная длина на картѣ составляетъ n-ю долю единицы, то длина соотвѣтствующаго разстоянія въ природѣ, выраженнаго въ тѣхъ же единицахъ будетъ $\frac{1}{n} \times M = \frac{M}{n}$, т. е. *знаменателю данной дроби, раздѣленному на число, показывающее, какую именно долю измѣренная на картѣ длина, составляетъ единицы мѣры.* Такимъ образомъ, еслибы масштабъ карты былъ $\frac{1}{42000}$, и требовалось знать сколько саженей представляется на ней англин. дюймомъ, то надлежало бы 42000 раздѣлить на 84 (ибо 1 анг. дюймъ $= \frac{1}{84}$ сажени), и частное $\frac{42000}{84} = 500$ выразило бы искомое число саженей.

§ 449. Обратно, еслибы при построеніи карты пожелали взять такой масштабъ, чтобы данною линіею a выражалось число A единицъ (на прим. саженей, тоазовъ, метровъ и проч.), то для опредѣленія масштаба въ семъ случаѣ, достаточно было бы данныя величины a и A выразить въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ мѣры, и потомъ a раздѣлить на A. Такъ на прим. если требуется, чтобы англ. дюймомъ, выражались 2 версты, то приведя 2 версты въ дюймы, получимъ

$2 \times 500 \times 7 \times 12 = 84000$ дюйм.; послѣ чего частное $\frac{1}{84000}$ выразитъ масштабъ карты. Также, если на картѣ 6 франц. линій выражаетъ 100 тоазовъ, то зная, что тоазъ состоитъ изъ 6 франц. футъ, 1 футъ изъ 12 франц. дюйм. и 1 дюймъ изъ 12 линій, получатъ 100 тоаз. $= 100 \times 6 \times 12 \times 12$ или 86400 линій; а слѣд. масштабъ карты будетъ $= \frac{6}{86400}$ или $= \frac{1}{14400}$.

§ 450. Для доставленія возможности измѣрять на картѣ линіи въ весьма мелкихъ доляхъ единицы, или откладывать таковыя доли на бумагѣ при построеніи карты, берутъ произвольную, но хорошо извѣстную часть главной единицы, (какъ на прим. англ. дюймъ для сажени, центиметръ для метра, франц. дюймъ для тоаза) и опредѣливъ число единицъ ею выражаемыхъ соотвѣтственно данному уменьшенію (§ 449), дѣлятъ потомъ ее на приличное число равныхъ между собою частицъ. Геометрическій чертежъ, представляющій принятую долю главной единицы, раздѣленную на мелчайшія части, называется *поперечнымъ масштабомъ*. (échelle de transversales). У насъ въ Россіи для построенія поперечнаго масштаба, принимаютъ англ. дюймъ, какъ составляющій 84-ю долю сажени, и дѣлятъ его на 100 частей. Самое же это построеніе дѣлается слѣдующимъ образомъ: проводится 11 горизонтальныхъ прямыхъ въ произвольномъ, но равномъ разстояніи одна отъ другой. На одной изъ крайнихъ (чер. 241) откладываются части AB, BC, CD.... равныя дюйму и возставляютъ перпендикуляры AA′, BB′, CC′....; линіи AB и A′B′ дѣлятъ каждую на 10 равныхъ между собою частей, и наконецъ соединивъ точку B съ первою точкою дѣленія b прямою, проводятъ чрезъ всѣ прочія точки прямыя къ ней параллельныя. Очевидно, что въ треуг-кѣ $B'bB$, части горизонтальныхъ линій, заключающіяся между боками BB′ и Bb будутъ составлять $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$.... десятой доли дюйма или $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$.... цѣлаго дюйма. Въ слѣдствіе чего, если циркулемъ откладывается линія равная kl, то она выразитъ $1^{д} + \frac{3}{10}^{д} + \frac{4}{100}^{д}$ или 1,34 дюйма. Далѣе очевидно, что еслибы масштабъ карты былъ принятъ $= \frac{1}{42000}$, то на основаніи сказаннаго, дюймомъ выражалась бы 1 верста или 500 саженей (см. § 448); слѣд. десятою долею означилось бы 50 са-

женъ, а сотою долею 5 саж. И такъ, еслибы по такому масштабу требовалось отложить 1285 саж., то надлежало бы взять $2^{д} + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$ или 2,57 дюйма. Этотъ результатъ очевидно получили бы, еслибы 1285 саж. привели въ дюймы и раздѣлили на знаменатель 42000, т. е. $\frac{1285 \times 84}{42000} = \frac{1285 \times 2}{1000}$ $= 2{,}57$, или, что еще скорѣе, еслибы раздѣлили 1285 на 500, ибо $42000 = 84 \times 500$.

§ 451. Впрочемъ выборъ линіи для построенія поперечнаго масштаба зависитъ отъ принятаго масштаба карты. Такъ на прим. еслибы карта построена была въ масштабѣ $\frac{1}{10000}$ и пожелали измѣряемыя на ней разстоянія циркулемъ, знать въ саженяхъ, то дюймовый поперечный масштабъ будетъ неудобенъ, ибо при уменьшеніи $\frac{1}{10000}$, анг. дюймомъ выразится $119\frac{1}{21}$ саж., а слѣд. на какое бы число частей дюймъ ни раздѣлили, каждая частица выразитъ дробное число саженей. Въ слѣдствіе чего, для построенія въ семъ случаѣ поперечнаго масштаба, будетъ удобнѣе вмѣсто дюйма принять линію, которая бы при этомъ уменьшеніи выразила 100 саженей, и потомъ эту уже линію раздѣлить на 100 частей. Длина такой линіи, очевидно составитъ 10000-ю долю ста саженей, т. е. $\frac{1}{100}$ сажени или $\frac{84}{100}$ дюйма. И такъ, при построеніи поперечнаго масштаба въ семъ случаѣ, надобно вмѣсто 1-го дюйма отложить (чер. 241) части AB, BC, CD... равными $\frac{84}{100}$ дюйма, а потомъ поступить какъ объяснено въ § 450.

§ 452. Изложенные нами способы опредѣлять уменьшеніе карты по длинѣ линіи, выражающей данное число линейныхъ единицъ, и обратно, доставляютъ возможность измѣрять по картѣ разстоянія въ мѣрахъ какого бы то ни было государства, не прибѣгая къ таблицѣ сравненія мѣръ. Такъ на прим. еслибы для масштаба карты, принято было 2 версты или 1000 саженей, (что соотвѣтствуетъ $\frac{1}{84000}$), и пожелали по такой картѣ знать разстоянія въ метрахъ, то достаточно было бы измѣрять центиметромъ, который въ семъ случаѣ выразитъ $\frac{84000}{100} = 840$ метровъ, а еслибы потребовалось знать разстоянія въ тоазахъ, то французскимъ дюймомъ, принимая его за $1166\frac{6}{9}$ тоаза, или что еще лучше линіею, рав-

ною $\frac{6}{7}$ франц. дюйма, какъ выражающею 1000 тоазовъ, ибо 1000 тоазовъ въ масштабѣ $\frac{1}{84000}$ выразится чрезъ $\frac{1000}{84000}=\frac{1}{84}$ тоаза или $\frac{6}{84}$ фута или наконецъ $\frac{72}{84}$ дюйма, что по сокращеніи обращается въ $\frac{6}{7}$.

§ 453. Степень подробности карты, зависитъ очевидно отъ принятаго масштаба. Чѣмъ масштабъ болѣе, или что все равно, чѣмъ меньшее число единицъ мѣры выражается на прим. дюймомъ, тѣмъ болѣе подробностей можно означить на картѣ, и обратно. Такимъ образомъ, масштабъ топографическихъ картъ долженъ быть болѣе масштаба семитопографическихъ, а масштабъ сихъ послѣднихъ болѣе нежели географическихъ подробныхъ картъ, и т. д. Но опредѣлительно сказать въ какомъ именно масштабѣ должны быть составляемы эти карты невозможно, ибо это зависиситъ отъ той степени подробности, которая требуется отъ каждой изъ нихъ (*).

C.) СОСТАВЛЕНІЕ КАРТЪ.

§ 454. Еслибы земная поверхность была математическою плоскостію, или поверхностію *развертываемою,* подобно конической или цилиндрической, то искусство составленія картъ основывалось бы на тѣхъ же самыхъ геометрическихъ

(*) Въ *условныхъ знакахъ, составленныхъ при канцеляріи Генераль-квартирмейстера главнаго штаба въ 1822 году,* постановлено правиломъ, чтобы *топографическія* карты составлялись въ масштабѣ $\frac{1}{42000}$ (т. е. верста въ дюймѣ), *семитопографическія* въ масштабѣ $\frac{1}{126000}$ (т. е. 3 версты въ дюймѣ), *специальныя* или *подробныя* въ $\frac{1}{210000}$ (т. е. 5 вер. въ дюймѣ) и наконецъ *генеральныя* въ масштабѣ отъ $\frac{1}{420000}$ до $\frac{1}{840000}$ (т. е. отъ 10 до 20 верстъ въ дюймѣ). Сверхъ того для картъ среднихъ между топографическими и семитопографическими, и названныхъ *хорографическими,* принятъ былъ масштабъ $\frac{1}{84000}$ (2 вер. въ дюймѣ). Но это постановленіе давно уже измѣнилось, доказательствомъ чему можетъ служить то, что *подробная* (специальная) *карта всей Россіи,* изданная г. генераломъ **Шубертомъ** составлена была въ масштабѣ $\frac{1}{420000}$; семитопографическія карты нѣкоторыхъ губерній, выгравированы въ масштабѣ $\frac{1}{210000}$, а для *топографической* карты за-

правилахъ, которыя служатъ для построенія фигуръ, подобныхъ даннымъ. Но какъ земля сфероидальна, то по невозможности развернуть поверхность ея на плоскости, а посему и изобразить на сей послѣдней положеніе предметовъ, не измѣнивъ, болѣе или менѣе, взаимныхъ между ними разстояній, содержанія поверхностей, направленія линій, и проч. прибѣгаютъ къ особымъ пріемамъ. Сіи послѣдніе заключаются въ построеніи сѣтки изъ меридіановъ и параллелей, или на основаніи правилъ *перспективы,* или такимъ образомъ, чтобы это построеніе (называемое *географическою сѣткою*), удовлетворяло какому либо одному условію, требуемому специальною цѣлію карты (*); въ первомъ случаѣ это построеніе именуется *проэкціею перспективною,* а во второмъ *проэкціею произвольною.* По начерченіи проэкціи, означаются сперва тѣ точки земной поверхности, коихъ широты и долготы извѣстны, а потомъ вносятся необходимыя подробности, какъ то: очертаніе земель, положеніе городовъ, и т. п.

§ 455. Но прежде нежели приступимъ къ объясненію послѣдняго дѣйствія, замѣтимъ, что еслибы мы имѣли готовую топографическую карту какой нибудь страны, то уменьшивъ ее по приличному масштабу, и выпустивъ излишнія подробности, получилась бы семитопографическая; уменьшеніе въ извѣстной степени сей послѣдней, дало бы географическую подробную, и т. д. Изъ сего можемъ заключить, что рѣшеніе общаго вопроса:» какъ изображается на картахъ положе-

---

падной Россіи, нынѣ составляемой и гравируемой въ военно-топографическомъ депо, принятъ масштабъ $\frac{1}{126000}$. Масштабы принятые для топографическихъ картъ въ иностранныхъ государствахъ также различные. Такъ на прим. новая топографическая карта Франціи гравируется въ масштабѣ $\frac{1}{80000}$; карты Пруссіи и Швейцаріи въ масштабѣ $\frac{1}{100000}$; карты Виртемберга и Бадена въ масштабѣ $\frac{1}{50000}$, а топографическія карты, составляющія атласъ Австрійской Имперіи въ масштабѣ $\frac{1}{144000}$.

(*) Такъ на прим. для *военныхъ соображеній* необходимо имѣть карты, которыя по мѣрѣ возможности представляли бы съ точностію взаимныя разстоянія мѣстъ; для *мореплаванія* направленіе линій, а для *кадастра* поверхностное содержаніе земель.

ніе предметовъ, и всѣ прочія подробности мѣстности,» можетъ быть разсматриваемо, какъ заключающееся въ искусствѣ составленія топографическихъ картъ (*). Топографическія карты составляются непосредственно изъ тригонометрическихъ и топографическихъ съемокъ, слѣдующимъ образомъ: положеніе точекъ тригон. сѣти всѣхъ трехъ разрядовъ наносятъ на листы бумаги или посредствомъ координатъ, или, посредствомъ особыхъ пріемовъ, которые будутъ нами изложены въ послѣдствіи. Совершивъ это дѣйствіе, называемое *прокладкою сѣти,* приступаютъ къ производству топографической съемки, имѣющей цѣлію опредѣлять положеніе всѣхъ предметовъ земной поверхности посредствомъ построенія на линіяхъ соединяющихъ каждую пару точекъ

(*) Не должно однакоже думать, чтобы безъ топографической карты не возможно было составить семитопографическую, а безъ сей послѣдней географическую подробную и т. д. Ложность подобнаго заключенія видна изъ того, что во всѣхъ почти государствахъ генеральныя карты предшествовали подробнымъ, подробныя семитопографическимъ и т. д. Степень подробности каждой вновь появлявшейся карты, зависѣла всегда отъ большаго количества собранныхъ свѣденій о краѣ. И въ самомъ дѣлѣ, генеральная карта могла быть составлена, когда географическое положеніе важнѣйшихъ точекъ государства сдѣлалось извѣстнымъ, ибо зная ихъ широту и долготу, получалась возможность назначать и самое ихъ положеніе на построенной географической сѣткѣ; а по извѣстнымъ разстояніямъ прочихъ предметовъ отъ опредѣленныхъ уже точекъ, нанести и положеніе ихъ на картѣ. Когда же свѣденія о краѣ распространялись, тогда для составленія географической подробной карты надлежало только увеличить генеральную и пополнить ее недостающими подробностями. Но очевидно, что поступая при составленіи картъ обратнымъ порядкомъ, т. е. переходя отъ подробнѣйшихъ къ менѣе подробнымъ, дѣйствіе получитъ гораздо бо́льшую точность, потому что погрѣшности, сдѣланныя въ топографическихъ картахъ, будутъ не столь и даже во все ощутительны въ семитопографическихъ и т. д. Не взирая однакоже на таковыя выгоды, въ практикѣ по большей части начинаютъ съ картъ менѣе подробныхъ, что происходитъ отъ затрудненій встрѣчаемыхъ при составленіи топографическихъ картъ, требующихъ значительнаго времени, издержекъ и т. п.

триг. сѣти, помѣстившихся на листѣ бумаги, ряда мелчайшихъ треугольниковъ, а потомъ изображать условными знаками какъ самые предметы, такъ и неровности мѣстоположенія. По производствѣ топографической съемки останется для составленія топографической карты снятые планы перерисовать въ приличномъ масштабѣ на листахъ бумаги, на которой предварительно начерчена географическая сѣтка.

Изъ сего заключаемъ, что искусство построенія топографическихъ картъ, состоитъ во 1-хъ) въ черченіи географическихъ сѣтокъ; во 2-хъ) въ прокладкѣ точекъ тригон. сѣти; въ 3-хъ) въ производствѣ топографической съемки и въ 4-хъ) въ перерисовкѣ снятыхъ плановъ на листахъ проэкціи. Въ послѣдующихъ главахъ сего отдѣленія изложены будутъ нами различныя методы построенія географическихъ сѣтокъ, а въ топографіи всѣ прочія дѣйствія.

—

ГЛАВА II.

О перспективныхъ проэкціяхъ.

§ 456. *Перспективнымъ* изображеніемъ какой либо части земной поверхности, называется вообще тотъ видъ, въ какомъ она представляется зрителю, обнимающему ее однимъ взглядомъ. И такъ, если вообразимъ, что глазъ зрителя находится въ произвольной, но опредѣленной точкѣ, изъ которой онъ можетъ видѣть всю часть изображаемаго пространства, и что между глазомъ и разсматриваемою поверхностію помѣщена прозрачная плоскость, то изображеніе, образуемое на сей послѣдней пересѣченіями съ нею лучей зрѣнія, направленныхъ на земные предметы, будетъ *перспективное.* Вышесказанная прозрачная плоскость предполагается всегда въ положеніи перпендикулярномъ къ тому лучу зрѣнія, который проходитъ въ средину изображаемаго пространства. Сей лучь называется—*оптическою осью проэкціи,* а самая плос-

кость — *плоскостью перспективы.* Фигура проэкціи всякаго очертанія очевидно зависитъ отъ положенія глаза зрителя, но не отъ разстоянія плоскости перспективы, ибо если для одной и той же точки зрѣнія, вообразимъ безконечное множество прозрачныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ оптической оси, то, по взаимной ихъ параллельности, перспективныя изображенія на сихъ плоскостяхъ будутъ между собою подобны.

Не взирая однакоже на это свойство, для построенія перспективнаго изображенія земной поверхности, выбираютъ положеніе не только точки зрѣнія, но и плоскости перспективы, дабы по опредѣленіи на ней способами геометрическими точекъ пересѣченія лучей зрѣнія, можно было потомъ представить положеніе оныхъ на бумагѣ. Сверхъ того, чтобы не опредѣлять каждаго предмета отдѣльно, ограничиваются построеніемъ лишь сѣтки изъ меридіановъ и параллелей, а потомъ вносятъ каждый предметъ по его долготѣ и широтѣ въ соотвѣтствующій ему четыреугольникъ. Такая сѣтка называется *проэкціею перспективною.*

A.) СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЭКЦІЯ.

§ 457. Для представленія цѣлаго полушарія употребляется лишь такъ называемая проэкція *стереографическая,* предложенная Птоломеемъ. Она предпочитается прочимъ по той причинѣ, что построеніе меридіановъ и параллелей представляетъ менѣе затрудненій, также и потому, что разстоянія между различными точками земной поверхности и содержаніе площадей подвергаются въ ней меньшему измѣненію, нежели во всѣхъ другихъ перспективныхъ проэкціяхъ. Стереографическая проэкція состоитъ въ слѣдующемъ:

Предполагается, что глазъ зрителя находится въ произвольной точкѣ поверхности, на прим. O (чер. 226), и что онъ видитъ всѣ ея части сквозь массу земли, какъ будто она была прозрачна. Плоскость AB, проходящая чрезъ центръ C въ положеніи перпендикулярномъ къ радіусу CO, проведенному въ точку зрѣнія, принимается за плоскость перспективы. Изображеніе, произведенное на ней пересѣченіемъ лу-

чей зрѣнія, направленныхъ на всѣ точки противоположной части полу-сферы, означитъ *стереографическую* проэкцію сей послѣдней.

Если точка O зрѣнія возьмется въ одномъ изъ полюсовъ, тогда экваторъ будетъ служить плоскостію AB перспективы; въ семъ случаѣ проэкція именуется *стереографическою полярною* или *проэкціею на экваторъ.* Если же точка O зрѣнія будетъ находиться въ одной изъ точекъ экватора, тогда проэкція называется *экваторіальною* или *проэкціею на меридіанъ.* Наконецъ, если точка зрѣнія будетъ находиться гдѣ либо между экваторомъ и полюсомъ, тогда проэкція носитъ названіе *горизонтальной,* потому что плоскостію перспективы будетъ плоскость параллельная горизонту зрителя.

§ 458. Замѣчательнѣйшее свойство стереографическихъ проэкцій заключается въ томъ, что гдѣ бы точка зрѣнія на поверхности земли ни находилась, меридіаны и параллели всегда представятся на проэкціи или въ видѣ прямыхъ линій, или въ видѣ круговъ, а сферическіе углы образуемые какими нибудь дугами на сферѣ, сохраняютъ свою величину на проэкціи.

Для полярной это очевидно, ибо зритель, находящійся въ полюсѣ O (чер. 234), увидитъ во 1-хъ) противоположный полюсъ Q, совпадающимъ съ центромъ C круга экватора, служащаго плоскостію перспективы; во 2-хъ) меридіаны, какъ круги, проходящіе чрезъ его оптическую ось OQ, въ видѣ радіусовъ экватора, и въ 3-хъ) круги параллелей полусферы AQB, онъ увидитъ въ видѣ одноцентральныхъ круговъ, потому что лучи зрѣнія направленные на всѣ точки каждой параллели, составятъ прямые конусы, имѣющіе общую ось OQ, и которые будутъ пересѣкаемы плоскостію AB перспективы параллельно ихъ основаніямъ.

Для доказательства же, что во всѣхъ другихъ случаяхъ, *всякій кругъ находящійся на шарѣ* (исключая проходящаго чрезъ точку зрѣнія, проэкція коего будетъ прямая линія), *изобразится въ стереографической проэкціи тоже въ видѣ круга,* возьмемъ произвольный кругъ NN′ (чер. 226) и предположимъ сперва, что онъ *перпендикуляренъ* къ плоскости

AOBQ, проходящей чрезъ глазъ O. Лучи зрѣнія, направленные на всѣ точки сего круга, составятъ наклоненный конусъ NON′, коего ось Oc будетъ совпадать съ плоскостію AOBQ. Сѣченіе сего конуса вертикальною плоскостію AB, образуетъ кривую линію *nn′*, служащую искомымъ перспективнымъ изображеніемъ круга NN′; требуется доказать, что эта кривая *nn′* есть кругъ. Уголъ N′NO измѣряется дугою $\frac{1}{2}$(AN′+AO), а уголъ *nn′*O дугою $\frac{1}{2}$(AN′+OB); дуги же сіи между собою равны, слѣд. и уголъ N=*n′*, а посему сѣченіе *nn′* есть *антипараллельное,* которое какъ извѣстно всегда представитъ кругъ (*).

Когда же кругъ NN′ (чер. 227) не перпендикуляренъ къ плоскости AOBQ, то соединивъ центръ *c* сего круга съ центромъ C сферы, линія C*c* будетъ перпендикулярна къ плоскости онаго: плоскость CO*c,* проходящая чрезъ ось O*c* конуса и прямую C*c,* будетъ перпендикулярна къ плоскости круга NN′, и пересѣчетъ сферу по дугѣ QL, а плоскость перспективы по прямой CL. Въ слѣдствіе чего, если обратимъ всю сферу на оси OQ такъ, чтобы плоскость LQO совпала съ плоскостію AOBQ, то кругъ NN′ придетъ въ положеніе перпендикулярное къ плоскости AOBQ, а посему сей случай обратится въ предшествующій.

(*) Справедливость этого заключенія основывается на слѣдующемъ геометрическомъ предложеніи:

Если чрезъ ось Oc (чер. 230) *наклоненнаго конуса* съ круговымъ основаніемъ, проведется плоскость NON′ перпендикулярная къ основанію, а потомъ конусъ разсѣчется плоскостію *nan′*, перпендикулярною къ плоскости NON′ и при томъ такъ, чтобы уголъ N=*n′*, то сѣченіе *nan′* будетъ кругъ. И въ самомъ дѣлѣ, если чрезъ какую нибудь точку *a* сего сѣченія, проведемъ плоскость *mam′* параллельно къ основанію, то въ сѣченіи получится кругъ, который очевидно будетъ перпендикуляренъ къ плоскости NON′. Сверхъ того, линія *ab* пересѣченія плоскостей *nn′* и *mm′*, будетъ перпендикулярна къ плоскости NON′, а посему къ линіямъ *mm′* и *nn′*. Но прямая *mm′* есть діаметръ круга *mam′*, слѣд. $mb:ab::ab:bm'$, откуда $ab^2=mb.bm'$. Изъ подобныхъ же треугольниковъ *mbn* и *m′bn′*, имѣемъ

$$mb:n'b::bn:bm', \text{ откуда } mb.bm'=n'b.bn,$$

§ 459. Для доказательства другаго свойства стереографическихъ проэкцій, а именно: что *углы, составляемые проэкціями дугъ, равны соотвѣтствующимъ имъ сферическимъ угламъ,* положимъ, что точка G (чер. 229), находящаяся на кругѣ AOBQ, представляетъ на сферѣ точку пересѣченія какихъ нибудь двухъ круговъ, и что прямыя GI и GL суть касательныя къ симъ кругамъ. Плоскости OGI, OGL, проходящія чрезъ лучь зрѣнія OG и прямыя GI, GL, будутъ очевидно касаться къ поверхностямъ конусовъ, образуемыхъ изъ лучей зрѣнія направленныхъ на точки данныхъ пересѣкающихся круговъ, по прямой OG, а пересѣченіями сихъ плоскостей OGI, OGL, съ плоскостію перспективы ADB, будутъ прямыя gI, gL, кои изобразятъ проэкціи прямыхъ GI, GL, и вмѣстѣ послужатъ на плоскости ADB касательными къ проэкціямъ данныхъ на сферѣ круговъ. Такъ какъ уг. IGL изображаетъ величину даннаго угла на сферѣ, а уг. IgL величину проэкцію онаго, то слѣдуетъ доказать, что уг. IGL$=$IgL.

Плоскость IGL проходящая чрезъ прямыя IG, GL, будетъ касательною къ сферѣ и перпендикулярною къ радіусу CG, а посему и къ плоскости AOBQ, какъ проходящей чрезъ сей послѣдній. Если прямыя GK, CK, представляютъ линіи пересѣченій плоскости AOBQ съ плоскостями IGL, ADB, а прямая IL взаимное пересѣченіе плоскостей IGL, ADB, то очевидно, что IL будетъ перпендикулярна къ плоскости AOBQ, а слѣд. и къ прямымъ GK, CK. Но уг. OGK, какъ образуемый хордою OG и касательною GK, измѣряет-

---

а слѣд. $$ab^2 = n'b.bn.$$

И такъ, перпендикуляръ, опущенный изъ каждой точки сѣченія nan' на прямую nn', будетъ среднимъ пропорціональнымъ между отрѣзками линіи nn', каковое свойство принадлежитъ только одному кругу. Сѣченіе nn' называется *антипараллельнымъ.*

Примѣнивъ это предложеніе къ чер. 226, дѣлается очевиднымъ, что сѣченіе nn' есть антипараллельное, ибо плоскость AOBQ, по условію, перпендикулярна къ основанію NN′ конуса и проходитъ чрезъ его ось Oc; плоскость AB перпендикулярна къ плоскости AOBQ и уг. N$=n'$.

ся дугою $\frac{1}{2}$(GB+OB), а уг. GgK дугою $\frac{1}{2}$(GB+AO); по равенству же сихъ дугъ и уг. OGK=GgK, а посему треуг. GgK есть равнобедренный, и GK=gK. Далѣе изъ равенства треугольниковъ LGK, LgK (имѣющихъ бокъ LK общій, углы при K прямые, и GK=gK), дѣлается очевиднымъ, что и уг. LGK=LgK. Такимъ же образомъ докажется изъ равенства треуг-въ GKI и gKI, что уг. KGI=KgI, а слѣд. уг. LGI=LgI и т. д. (*).

Еслибы точка G пересѣченія данныхъ круговъ, находилась въ положеніи G′, т. е. внѣ плоскости AOBQ, то слѣдовало бы обратить всю сферу на оси OQ, такъ, чтобы плоскость G′CO совпала съ плоскостію AOBQ. Очевидно, что сей случай обратится въ предыдущій.

§ 460. Изложимъ теперь графическіе способы для построенія стереографическихъ проэкцій:

I. *Экваторіальная проэкція.* Положимъ, что плоскость AOBQ (чер. 228) представляетъ экваторъ, точка O глазъ зрителя и прямая AB пересѣченія экватора съ плоскостію перспективы, находящейся въ семъ случаѣ на меридіанѣ. Эта прямая AB очевидно будетъ служить проэкціею полуэкватора AQB. Положимъ далѣе, что точка M и діаметрально ей противоположная M′, суть точки пересѣченія экватора съ однимъ изъ меридіановъ. Проведя изъ глаза O, прямыя OM, OM′, получимъ на прямой AB двѣ точки пересѣченій m и m', кои изобразятъ проэкціи точекъ M, M′, а самая линія mm', проэкцію діаметра MM′. Если вообразимъ, что плоскость перспективы обратилась около линіи AB на четверть полнаго оборота и совпала съ кругомъ AOBQ, то земная ось совпадетъ съ прямою OQ, а полюсы съ точками O и Q. Но какъ точки m и m' не перемѣнятъ своихъ прежнихъ положеній, то принявъ mm' за діаметръ, останется изъ точки i, находящейся на срединѣ mm', описать кругъ OmQ, который очевидно пройдетъ чрезъ O и Q, (ибо уг. $mOm'=90°$) и изобразитъ на перспективѣ требуемый меридіанъ.

(*) Можетъ случиться, что касательныя къ бокамъ даннаго сфер. угла будутъ по одну сторону плоскости AOBQ: тогда уголъ между ними будетъ равенъ разности угловъ LGK, KGI.

Для построенія круговъ параллелей положимъ, что кругъ POP′Q (чер. 233) представляетъ меридіанъ, проходящій чрезъ глазъ O, находящійся, какъ и прежде, на экваторѣ; PP′ ось земли; N и N′ двѣ точки, въ коихъ одна изъ параллелей пересѣкаетъ меридіанъ POP′Q. Прямыя ON, ON′, проведенныя изъ сихъ точекъ въ глазъ O, пересѣкутъ линію PP′ въ двухъ точкахъ *n*, *n′*, изображающихъ проэкціи точекъ N, N′, а самая линія *nn′* проэкцію діаметра разсматриваемаго круга параллели. Если вообразимъ теперь, что плоскость перспективы обратилась около PP′ на четверть оборота, т. е. что она совпала съ кругомъ POP′Q, то точки *n*, *n′*, не измѣнятъ прежнихъ своихъ положеній, а тѣ точки, въ которыхъ параллель пересѣкаетъ плоскость перспективы, совмѣстятся съ точками N, N′. И такъ, для построенія оной, надлежитъ принять *nn′* за діаметръ, и описать кругъ, который очевидно пройдетъ чрезъ точки N, N′.

Такъ какъ при построеніи полушарій, меридіаны и параллели проводятся обыкновенно отъ 5° до 5°, то для сего какъ дуга AM (чер. 228), такъ и дуга PN (чер. 233) послѣдовательно берется въ 5°, 10°, 15°....., что очевидно.

§ 461. II. *Полярная проэкція.* Положивъ, что точка O (чер. 234) есть глазъ зрителя, находящійся въ полюсѣ, а кругъ AOBQ меридіанъ, раздѣлимъ его окружность отъ 5° до 5° (на чер. 234 онъ раздѣленъ отъ 15° до 15°), и проведемъ изъ всѣхъ точекъ N, M,.... дѣленія, прямыя ON, OM,... Точки *n*, *m*,.... сѣченій оныхъ съ прямою AB, опредѣлятъ длины радіусовъ для круговъ, выражающихъ проэкціи параллелей. И такъ, если представимъ себѣ, что плоскость перспективы обратилась около AB на 90°, т. е. что она совпала съ кругомъ AOBQ, то останется сперва изъ точки P, радіусами P*n*, P*m*.... описать круги, а потомъ провести радіусы PN, PM....; первые будутъ служить перспективными изображеніями параллелей, а вторые меридіановъ.

§ 462. III. *Горизонтальная проэкція.* Въ сей проэкціи глазъ предполагается въ точкѣ діаметрально противоположной тому мѣсту, которое желаютъ помѣстить въ центрѣ

карты. И такъ, пусть AOBQ (чер. 232) представляетъ меридіанъ, проходящій чрезъ глазъ O. Лучи зрѣнія OP, ON, ON′, направленные въ верхній полюсъ P, и оконечности N, N′, какой нибудь параллели; опредѣлятъ на прямой AB (изображающей проэкцію полу-меридіана AQB), положеніе проэкціи p полюса, и діаметра nn' круга параллели. Проэкціи оконечностей діаметра экватора GG′, опредѣлятся такимъ же образомъ въ точкахъ g и g'. Для построенія проэкцій, какъ сего послѣдняго, такъ и параллелей, надлежитъ вообразить, что плоскость перспективы обратилась около AB и совпала съ кругомъ AOBQ; послѣ чего принявъ gg' и nn' за діаметры, должно описать круги, чрезъ что и получимъ дугу OgQ для экватора и кругъ nn' для параллели.

Для построенія проэкцій меридіановъ, проведемъ сначала чрезъ нижній полюсъ P′ прямую OP′; пересѣченіе ея съ продолженіемъ прямой AB, опредѣлитъ точку p', которая изобразитъ проэкцію полюса P′. Обратимъ плоскость перспективы по вышесказанному: поелику проэкціи всѣхъ меридіановъ должны быть круги, проходящіе чрезъ точки p и p', то очевидно, что центры ихъ будутъ находиться на прямой Id перпендикулярной къ AB, и проходящей чрезъ половину pp'. Но для опредѣленія на сей прямой положенія самыхъ центровъ меридіановъ, надлежитъ замѣтить, что въ слѣдствіе 2-го свойства стереограф. проэкцій (§ 459), углы составляемые меридіанами на проэкціи должны быть равны соотвѣтствующимъ угламъ на сферѣ. Такимъ образомъ, цроэкція меридіана, отстоящаго на прим. на 30° долготы отъ главнаго, т. е. проходящаго чрезъ точку Q, составитъ при p съ прямою pp' (представляющею проэкцію главнаго меридіана PQP′) уголъ также въ 30°. Въ слѣдствіе чего, для построенія проэкціи вышесказаннаго меридіана, проведемъ сперва линію pL, составляющую съ pp' уг. Lpp'=30°; потомъ возставимъ къ ней перпендикуляръ pd, пересѣченіе коего съ Id въ точкѣ d, опредѣлитъ центръ искомаго меридіана, ибо дуга pM описанная радіусомъ dp, очевидно составляетъ съ pp' уголъ также въ 30°. Построеніе будетъ проще, если вмѣсто проведенія прямой pL и возставленія къ ней перпендикуляра, начертимъ

уг. $p'pd$ равный дополненію данной долготы до $90°$; слѣд. для построенія меридіановъ, на прим. отъ $15°$ до $15°$, опишемъ изъ p произвольнымъ радіусомъ дугу $\mathrm{I}q$, потомъ отложивъ на ней отъ точки I въ обѣ стороны дуги въ $15°$, проведемъ чрезъ p и чрезъ всѣ вышесказанныя точки дѣленій прямыя, пересѣченія коихъ съ перпендикуляромъ $\mathrm{I}d$, изобразятъ центры искомыхъ круговъ.

§ 463. Всѣ вышепредложенные способы построенія стереографическихъ проэкцій очевидно состоятъ въ геометрическомъ опредѣленіи положенія центровъ и длины радіусовъ меридіановъ и параллелей. По многосложности чертежа, эти способы неудобны, и потому выведемъ формулы, съ помощію коихъ можно было бы вычисленіемъ опредѣлить какъ тѣ, такъ и другія.

Положимъ, что дуга $\mathrm{PN}=\Delta$ (чер. 226) представляетъ разстояніе одного изъ круговъ параллелей отъ полюса P, а дуга $\mathrm{PQ}=\mathrm{D}$ разстояніе полюса отъ точки Q діаметрально противоположной съ глазомъ O зрителя. Центръ круга nn', служащаго перспективнымъ изображеніемъ даннаго круга NN', будетъ находиться въ точкѣ i, лежащей на срединѣ линіи nn'. Изобразимъ радіусъ его ni чрезъ ϱ, а разстояніе $\mathrm{C}i$ обоихъ центровъ C и i чрезъ α, и опредѣлимъ величины α и ϱ.

Такъ какъ углы $\mathrm{CO}n'$ и $\mathrm{CO}n$, измѣряются половинами дугъ QN' и QN, и какъ $\mathrm{QN}'=\mathrm{PQ}+\mathrm{PN}'=\mathrm{D}+\Delta$, а $\mathrm{QN}=\mathrm{PQ}-\mathrm{PN}=\mathrm{D}-\Delta$, то принимая радіусъ $\mathrm{CO}=\mathrm{R}$, прямоуг. треуг-ки $\mathrm{CO}n'$ и $\mathrm{CO}n$, даютъ

$$\mathrm{C}n'=\mathrm{R}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{D}+\Delta)=\beta',\quad \mathrm{C}n=\mathrm{R}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\mathrm{D}-\Delta)=\beta;$$

$$\mathrm{C}i=\alpha=\tfrac{1}{2}(\mathrm{C}n'+\mathrm{C}n),\quad \varrho=\tfrac{1}{2}(\mathrm{C}n'-\mathrm{C}n).$$

Но $$\mathrm{C}n'\pm\mathrm{C}n=\mathrm{R}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\Delta)}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\Delta)}\pm\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{D}-\Delta)}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{D}-\Delta)}\right]$$

$$=\mathrm{R}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\Delta)\cos\frac{1}{2}(\mathrm{D}-\Delta)\pm\sin\frac{1}{2}(\mathrm{D}-\Delta)\cos\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\Delta)}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\Delta)\cos\frac{1}{2}(\mathrm{D}-\Delta)}\right]$$

Если возьмемъ въ этомъ уравненіи знакъ $+$, то числитель обратится въ $\sin\mathrm{D}$, а если возьмемъ знакъ $-$, то въ $\sin\Delta$. Знаменатель въ томъ и другомъ случаѣ будетъ $\frac{1}{2}(\cos\mathrm{D}+\cos\Delta)$. И такъ

$$\alpha = R.\frac{\sin D}{\cos D + \cos \varDelta} \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

$$\varrho = R.\frac{\sin \varDelta}{\cos D + \cos \varDelta} \dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Для опредѣленія положенія проэкцій полюсовъ (чер. 232), т. е. точекъ p и p', изъ прямоуг. треуг-въ CpO и $Cp'O$, въ коихъ уг. $COp = \frac{1}{2}D$, уг. $COp' = 90° - \frac{1}{2}D$, имѣемъ

$$Cp = R \tang \tfrac{1}{2}D, \quad Cp' = R \cot \tfrac{1}{2}D;$$

Сумма сихъ уравненій выразитъ длину линіи pp' и будетъ

$$pp' = R(\tang \tfrac{1}{2}D + \cot \tfrac{1}{2}D) = R\frac{\sin^2 \frac{1}{2}D + \cos^2 \frac{1}{2}D}{\sin \frac{1}{2}D \cos \frac{1}{2}D} = \frac{2R}{\sin D} \dots\dots (3).$$

Слѣд. положеніе точки I, находящейся на срединѣ линіи pp', опредѣлится уравненіемъ

$$CI = pI - pC = \frac{R}{\sin D} - R \tang \tfrac{1}{2}D = R\left[\frac{1}{2\sin \frac{1}{2}D \cos \frac{1}{2}D} - \frac{\sin \frac{1}{2}D}{\cos \frac{1}{2}D}\right]$$

$$= R\,\frac{1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}D}{2\sin \frac{1}{2}D \cos \frac{1}{2}D} = \frac{R \cos D}{\sin D}$$

или

$$CI = \delta = R \cot D \dots\dots\dots\dots\dots (4).$$

По найденному положенію сей точки I, легко опредѣлить положеніе центра и длину радіуса каждаго изъ меридіановъ. И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ ихъ центры должны находиться на прямой dI, перпендикулярной къ pp', то положивъ, что точка d представляетъ положеніе одного изъ сихъ центровъ, прямоуг. треуг. dpI, даетъ

$$Id = pI . \tang dpI$$

$$dp = \frac{pI}{\cos dpI} = pI . \sec dpI.$$

Но какъ изъ § 462, намъ уже извѣстно, что если π есть долгота того меридіана, проэкція коего очерчивается радіусомъ pd, то уг. dpI будетъ $= 90° - \pi$; въ слѣдствіе чего, подставя вмѣсто pI или $\frac{1}{2}pp'$ его величину $\frac{R}{\sin D}$, и означивъ Id и pd, чрезъ α' и ϱ', получимъ

$$\mathrm{I}d = \alpha' = \frac{\mathrm{R}\cot\pi}{\sin \mathrm{D}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

$$dp = \varrho' = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{cosec}.\pi}{\sin \mathrm{D}} \dots\dots\dots\dots\dots (6).$$

§ 464. Если во всѣхъ вышенайденныхъ уравненіяхъ дугу PQ=D, приравняемъ четверти окружности, D=90°, то они будутъ приличествовать *экваторіальной* проэкціи, что очевидно. Такимъ образомъ

урав. (1) обратится въ $\alpha = \dfrac{\mathrm{R}}{\cos\Delta} = \mathrm{R}\sec\Delta$ ⎫ .... (7)
» (2) » » $\varrho = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\Delta$ ⎭
» (5) » » $\alpha' = \mathrm{R}\cot\pi = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\theta$ .... (8)
» (6) » » $\varrho = \mathrm{R}\,\mathrm{cosec}\,\pi = \mathrm{R}\sec\theta$ .... (9),

положивъ $\theta = 90° - \pi$, т. е. дополненію долготы меридіана до 90°.

Изъ уравненій (7) заключаемъ, что на проэкціи разстояніе центра каждаго круга параллели отъ центра карты, равняется секансу полярнаго разстоянія сей параллели, а радіусъ, коимъ надобно описывать кругъ параллели равняется тангенсу той же дуги. Урав. (4), при положеніи D=90°, показываетъ, что центры проэкцій меридіановъ, должны находиться на діаметрѣ, представляющемъ экваторъ; наконецъ изъ урав. (8) видимъ, что разстояніе центра каждаго меридіана отъ центра карты равняется котангенсу долготы, а радіусъ, коимъ его надобно описывать, косекансу оной.

Нѣтъ надобности распространяться о самомъ построеніи экваторіальной проэкціи, когда имѣютъ таблицу натуральныхъ тангенсовъ и секансовъ. Если же такой таблицы не имѣютъ, или не желаютъ вычислять уравненія (7), (8) и (9), то для начерченія меридіановъ и параллелей на прим. отъ 15° до 15°, опишутъ сперва кругъ EPQP′ и проведя два перпендикулярные діаметра EQ и PP′, раздѣлятъ четверть окружности EP на 6 равныхъ частей, а потомъ проведутъ въ точки дѣленія радіусы и продолжатъ ихъ до встрѣчи съ перпендикуляромъ EF возставленнымъ изъ E къ EC. Прямыя Ea, Ea', Ea''... изобразятъ тангенсы дугъ 15°, 30°, 45°....., а прямыя Ca, Ca', Ca''.... секансы оныхъ. Послѣ того послѣдовательно

откладывая секансы по діаметру PP′ отъ точки C въ обѣ стороны, опишутъ дуги радіусами, равными соотвѣтствующимъ тангенсамъ, а потомъ отъ центра C откладывая по діаметру EQ тангенсы, начертятъ дуги радіусами равными секансамъ. Первыя изобразятъ дуги параллелей, а вторыя меридіановъ.

§ 465. Въ заключеніе, считаемъ полезнымъ присовокупить слѣдующія замѣчанія, касательно стереографическихъ проэкцій:

1-е) Дуги большихъ круговъ, соединяющія на землѣ мѣсто избранное для центра карты со всякою другою точкою ея поверхности, изображаются на проэкціи въ видѣ прямыхъ линій, ибо плоскости такихъ круговъ проходятъ чрезъ точку зрѣнія. Слѣд. на горизонтальной проэкціи, построенной на прим. для Петербурга, кратчайшія разстоянія отъ него до всѣхъ точекъ, означатся направленіемъ радіусовъ карты; но длина сихъ прямыхъ, измѣренная на картѣ посредствомъ масштаба, не выразитъ дѣйствительную длину соотвѣтствующихъ разстояній въ природѣ, ибо по мѣрѣ отдаленія отъ центра карты къ краямъ ея, дуги одинаковаго числа градусовъ на картѣ постепенно увеличиваются (*), а потому о величинѣ такихъ разстояній не иначе можно заключить, какъ посредствомъ числа градусовъ въ нихъ заключающихся (**).

(*) Если изъ точки O (чер. 234) направятся лучи зрѣнія въ оконечности равныхъ дугъ противоположной полуокружности AQB, то углы сими лучами составляемые, хотя и будутъ равны, но проэкціи дугъ на плоскости AB, будутъ возрастать по мѣрѣ отдаленія ихъ отъ центра P, что очевидно.

(**) Пусть кругъ AOBQ (чер. 232) будетъ начерченная проэкція, C его центръ, n произвольная точка, и требуется по длинѣ линіи nC опредѣлить число градусовъ земной дуги, выражаемой этою линіею: проведя діаметръ OQ перпендикулярно къ Cn, а потомъ чрезъ точку n прямую NO, дуга NQ изобразитъ ту, которой число y градусовъ опредѣляется. Изъ прямоуг-го треуг-ка nCO, будетъ $\tan g\, nOC = \frac{nC}{CO}$; но $nOC = \frac{1}{2}NQ = \frac{1}{2}y$, а потому, если nC и CO

2-е) Изъ свойства, предложеннаго въ § 459, слѣдуетъ, что четыреугольники въ стереограф. проэкціяхъ, образуемые меридіанами и параллелями будутъ повсюду прямоугольны какъ и на шарѣ; но какъ градусы меридіана, въ слѣдствіе вышесказаннаго, будутъ имѣть величину различную, то страны на картѣ по мѣрѣ отдаленія отъ ея средины будутъ постепенно расширяться, и точность очертанія земель сохранится только на срединѣ карты. Отъ такого возрастанія градусовъ меридіана, происходитъ другая невыгода сихъ проэкцій, что помѣщеніе точекъ на построенной сѣткѣ, по ихъ долготѣ и широтѣ, довольно затруднительно. По причинѣ этихъ недостатковъ, стереографическія проэкціи не употребляются нынѣ для построенія отдѣльныхъ странъ; но для изображенія цѣлыхъ полушарій онѣ удобны потому, что съ одной стороны построеніе сѣтки довольно просто, а съ другой, онѣ доставляютъ возможность обнимать однимъ взглядомъ относительное положеніе и очертаніе всѣхъ земель въ совокупности. Сверхъ того на стереографическихъ горизонтальныхъ проэкціяхъ можно рѣшать графически многія астрономическія задачи, какъ на прим. опредѣлять часъ восхожденія и захожденія солнца на данный день на томъ горизонтѣ, для коего построена карта, или находить высоту и азимутъ солнца въ данное мгновеніе и т. п. (*).

В.) **ОРѲОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЭКЦІЯ.**

§ 466. Такъ называется то изображеніе земной поверхности, въ какомъ она представляется зрителю, находящемуся отъ ней въ безконечномъ разстояніи. Если вообразимъ, что плоскость перспективы проходитъ, какъ и въ стереографи-

---

будутъ измѣрены посредствомъ масштаба, то частное оныхъ выразитъ тангенсъ половинной дуги, коей число градусовъ опредѣляется. Изъ сего видимъ, что разстоянія точекъ отъ центра карты возрастаютъ вообще въ содержаніи тангенсовъ половины угловъ.

(*) Рѣшеніе подобнаго рода астрономическихъ задачь съ подробностію изложено въ *Математической Географіи соч. Тихомирова.* С. П. бургъ 1831.

ческихъ проэкціяхъ, чрезъ центръ земли, а глазъ отдаляется отъ земной поверхности по направленію оптической оси, то очевидно, что углы образуемые лучами зрѣнія будутъ становиться острѣе; наконецъ, если разстояніе глаза отъ поверхности земли будетъ безконечно, тогда лучи зрѣнія обратятся въ перпендикулярныя линіи къ плоскости перспективы. И такъ, сего рода проэкціи могутъ быть разсматриваемы, какъ образуемыя подошвами перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ всѣхъ точекъ поверхности земли на одинъ изъ большихъ круговъ сферы. Поелику сія плоскость, можетъ быть взята или на экваторѣ, или на одномъ изъ меридіановъ, или наконецъ на кругѣ параллельномъ къ горизонту какого нибудь мѣста, то орѳографическая проэкція можетъ быть также *полярною, экваторіальною* и *горизонтальною.* Въ ороографической *полярной*, подобно какъ въ стереографической, меридіаны представятся въ видѣ радіусовъ экватора, а параллели въ видѣ одноцентральныхъ круговъ, ибо перпендикуляры, опущенные на экваторъ изъ всѣхъ точекъ каждаго круга параллели составятъ прямые цилиндры, сѣченіе коихъ плоскостію перспективы, образуютъ круги равные основанію. Различіе полярной орѳографической проэкціи отъ полярной стереографической, состоитъ только въ томъ, что круги параллелей на первой, по мѣрѣ отстоянія своего отъ центра карты, между собою сближаются, а на другой отдаляются.

Въ *орѳографической экваторіальной*, параллели представятся на проэкціи въ видѣ прямыхъ линій параллельныхъ между собою, а меридіаны въ видѣ эллипсисовъ, ибо перпендикуляры опущенные на главный меридіанъ изъ всѣхъ точекъ каждой параллели, будутъ находиться въ одной и той же плоскости параллельной экватору, а перпендикуляры опущенные изъ всѣхъ точекъ каждаго меридіана, составятъ наклоненный цилиндръ съ круговымъ основаніемъ, сѣченіе коего плоскостію перспективы не будетъ антипараллельное, а потому и произведетъ эллипсисъ.

Въ *орѳографической горизонтальной*, по той же причинѣ, какъ параллели, такъ и меридіаны, (исключая только проходящаго чрезъ оптическую ось), представятся въ видѣ эллипсисовъ.

Недостатки въ стереографическихъ и орѳографическихъ проэкціяхъ противоположны, ибо въ первыхъ, дуги, лежащія по направленію радіусовъ карты и заключающіе въ себѣ одинаковое число градусовъ, постепенно увеличиваются, какъ выше видѣли отъ центра къ краямъ ея, а во вторыхъ —уменьшаются и даже не постепенно, но тѣмъ быстрѣе, чѣмъ онѣ находятся ближе отъ края карты, такъ что, на прим. въ орѳографической полярной, экваторіальныя страны представляются сливающимися почти въ одну черту. Какъ эти невыгоды, такъ и трудность черченія эллипсисовъ, служатъ главными причинами, почему орѳографическія проэкціи во все не употребляются ни для изображенія полушарій, ни даже и отдѣльныхъ государствъ.

С.) ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЭКЦІЯ.

§ 467. Въ сей проэкціи, глазъ зрителя предполагается въ центрѣ сферы, а плоскость перспективы касательною. Сего рода проэкціи могутъ быть также полярныя, экваторіальныя и горизонтальныя, смотря потому къ полюсу ли, къ экватору, или къ какому либо другому мѣсту возьмется касательная плоскость. Очевидно, что для изображенія цѣлаго полушарія употребить ихъ невозможно. Такъ какъ точка зрѣнія предполагается здѣсь постоянно находящеюся въ центрѣ шара, т. е. на линіи пересѣченія меридіановъ, то сіи послѣдніе всегда изобразятся въ видѣ прямыхъ, а параллели различно: въ *полярной,* онѣ будутъ одноцентральными кругами, по причинѣ параллельности перспективной плоскости съ основаніемъ прямыхъ конусовъ, построенныхъ на кругахъ параллелей. Въ *экваторіальной,* всѣ параллели изобразятся въ видѣ гиперболъ, ибо конусы будутъ пересѣкаться плоскостію перспективы перпендикулярно къ ихъ основаніямъ. Въ *горизонтальной* проэкціи, параллель NN′ (чер. 231), коей бокъ конуса NC параллеленъ съ плоскостію MK перспективы, изобразится въ видѣ параболы. Широта этой параллели будетъ служить широтѣ точки M касанія величиною дополнительною до 90°, ибо уг. ECN = CKM = 90° — MCK. Всѣ па-

раллели имѣющія широту бо̀льшую, нежели параллель NN′, изобразятся въ видѣ эллипсисовъ, а прочія въ видѣ гипербол.

Центральныя проэкціи во все не употребительны для построенія географическихъ картъ, какъ по трудности построенія параллелей, такъ и потому, что расширеніе странъ въ нихъ гораздо значительнѣе, нежели въ стереографическихъ. Но этого рода проэкціи замѣчательны тѣмъ, что онѣ служатъ основаніемъ для построенія солнечныхъ часовъ, а также и для рѣшенія слѣдующаго вопроса: «изобразить на бумагѣ какую нибудь часть небесной сферы, въ томъ видѣ, въ какомъ она представляется наблюдателю.»

D.) **ПРОЭКЦІЯ ЛАГИРА.**

§ 468. Противоположные недостатки стереографическихъ и орѳографическихъ проэкцій, подали поводъ *Лагиру* заключить, что если бы мы стали удалять точку зрѣнія отъ поверхности шара, а плоскость перспективы AB (чер. 238) оставили въ прежнемъ ея положеніи, то нашли бы такую точку O на продолженіи оптической оси QF, для коей неравенство линейныхъ протяженій на плоскости перспективы было бы наименьшее. Вычисленіе показало Лагиру, что эта точка должна находиться отъ поверхности шара въ разстояніи равномъ $\sin 45°$ (принимая радіусъ шара $= 1$), т. е. если $QG = \frac{1}{2} QB$, и EG перпендикулярна къ OQ, то OF должно быть $= GE$ (*). Хотя таковая проэкція выгоднѣе стереографическихъ и орѳографическихъ, однакоже она никогда не была употреблена, вѣроятно по затрудненію встрѣчаемому въ построеніи параллелей и меридіановъ, которые будутъ бо̀льшею частію эллипсисами.

(*) Въ этомъ убѣдиться не трудно, ибо рѣшеніе сего вопроса заключается въ опредѣленіи положенія точки O такимъ образомъ чтобы прямая Cg составляла ту же часть радіуса CB, какую дуга QG составляетъ четверти окружности QB, т, е. если $QG = \frac{1}{n} 90°$, то надлежитъ, чтобы и $Cg = \frac{1}{n}$. Опустивъ изъ точ-

Е.) ОБЩІЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНІЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХЪ ПРОЭКЦІЙ ВООБЩЕ.

§ 469. Пусть PP′ (чер. 237) будетъ ось земли; AFTL меридіанъ, принимаемый за главный, и коего плоскость проходитъ чрезъ точку O зрѣнія, взятую отъ центра C въ разстояніи $OC=a$; FBL большой кругъ сферы, перпендикулярный къ оси OC, встрѣчающей сферу въ точкѣ T, которой широта $=\lambda$, $PT=90^\circ-\lambda$; ABT другой кругъ, проходящій чрезъ OC перпендикулярный къ FC. Проведя въ разстояніи $Cc=\alpha$ отъ центра C, плоскость ycx перпендикулярную къ прямой OC, примемъ ее за плоскость перспективы, а прямыя cy, cx; выражающія пересѣченія оной съ плоскостями главнаго меридіана и круга ABT, за оси координатъ, въ отношеніи коихъ опредѣлимъ положеніе точки m, служащей проэкціею точки M, взятой на меридіанѣ PMP′, и коей географ. широта есть l, а долгота p, т. е. $PM=90^\circ-l$, уг. $MPT=p$.

ки G перпендикуляръ EG къ OQ, получимъ изъ подобныхъ треуг-въ EGO и CgO пропорцію

$$EG : Cg = EC + CO : CO$$

или
$$EG \times CO = Cg \times EC + Cg \times CO,$$

откуда
$$CO = \frac{Cg \times EC}{EG - Cg} = x;$$

Но $Cg=\frac{1}{n}$, $EG=\sin QG$ или $=\sin\left(\frac{1}{n}90^\circ\right)$, и $EC=\cos\left(\frac{1}{n}90^\circ\right)$, а посему

$$x=\frac{\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{1}{n}90^\circ\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}90^\circ\right)-\frac{1}{n}} \text{ или } =\frac{\cos\left(\frac{1}{n}90^\circ\right)}{n\sin\left(\frac{1}{n}90^\circ\right)-1}.$$

На прим. положивъ $n=2$, получимъ

$$x=\frac{\cos 45^\circ}{2\sin 45^\circ-1} \text{ или } =\frac{\sin 45^\circ}{2\sin 45^\circ-1}.$$

По вычисленіи найдемъ $x=1{,}7071068$; слѣд. $OF=x-CF$ $=0{,}7071068$. Но какъ логариѳмъ этого числа есть 9.8494874 и $\log\sin 45^\circ=9.8494850$, то заключаемъ, что OF почти $=\sin 45^\circ$. Если же возьмемъ для n, какое либо другое число, то получимъ для QF величину, хотя и не столь близко подходящую къ $\sin 45^\circ$, однакоже достаточно удовлетворяющую условію вопроса.

Опустимъ изъ M перпендикуляръ MG$=$Y на плоскость ABT и изъ G перпендикуляръ GK$=$X на прямую AT, выразимъ Y, X и Z$=$CK въ функціи l, p, λ и радіуса r шара. Перпендикуляры MS, MQ, опущенные изъ M, одинъ на земную ось PP′, а другой на плоскость главнаго меридіана FTL, образуютъ треуг. MSQ прямоугольный при Q и кого бокъ MQ$=$GK$=$X, а уг. MSQ $=$ сфер. углу MPT$=p$, т. е. долготѣ точки M. Изъ сего треуг-ка имѣемъ

$$MQ \text{ или } X = MS.\sin p;$$

Но прямоуг. треуг. CMS, въ которомъ CM$=r$ радіусу шара, а уг. SCM$=90°-l$, даетъ MS$=$CM.sin SCM или $=r\cos l$; слѣд.

$$X = r\cos l\sin p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Такимъ же образомъ для выраженія Y и Z, проведемъ прямыя CG, MK и дуги FM и MT, отъ чего произойдутъ два прямоугольные треуг-ка CMG и CMK, изъ коихъ первый даетъ

$$MG \text{ и } Y = CM.\sin MCG = r\cos FM;$$

а другой $\quad CK \text{ или } Z = CM.\cos MCK = r\cos TM.$

Но изъ сфер. треуг-ка FMP, въ коемъ бока FP$=\lambda$, PM$=90°-l$ и уг. FPM$=180°-p$, по основной формулѣ сфер. триг. имѣемъ

$$\cos FM = \cos\lambda\sin l - \sin\lambda\cos l.\cos p \ldots\ldots (11),$$

а изъ сфер. треуг-ка MPT, въ коемъ бока MP$=90°-l$, PT$=90°-\lambda$ и уг. MPT$=p$, по той же формулѣ, получимъ

$$\cos MT = \sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l.\cos p \ldots\ldots (12);$$

слѣд. для длины координатъ Y и Z, имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} Y = r(\cos\lambda\sin l - \sin\lambda\cos l.\cos p) \\ Z = r(\sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l.\cos p) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Послѣ чего изъ треуг-въ Ocg и Omg подобныхъ треугольникамъ OKG и OMG, получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{mg}{MG} \text{ или } \frac{y}{Y}=\frac{Oc}{OK}, \text{ откуда } y=\frac{Y.Oc}{OK}=\frac{Y(a-\alpha)}{a+Z}\\ \frac{Cg}{KG} \text{ или } \frac{x}{X}=\frac{Oc}{OK}, \text{ откуда } x=\frac{X.Oc}{OK}=\frac{X(a-\alpha)}{a+Z}\end{array}\right\}\ldots\ldots(14)$$

ибо $Oc=OC-Cc=a-\alpha$, а $OK=OC+CK=a+Z$.

Подставя въ урав. (14) вмѣсто Y, X и Z величины выражаемыя формулами (10) и (13), получимъ

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{(a-\alpha)r.(\cos\lambda\sin l-\sin\lambda\cos l.\cos p)}{a+r(\sin\lambda\sin l+\cos\lambda\cos l.\cos p)}\\ x=\frac{(a-\alpha)r.\cos l.\sin p}{a+r(\sin\lambda\sin l+\cos\lambda\cos l.\cos p}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(15).$$

Таковы суть формулы, выражающія координаты проэкціи точки, которой геогр. широта и долгота суть l и p, при условіи, что точка O зрѣнія и плоскость перспективы взяты въ произвольномъ разстояніи отъ центра шара. Займемся теперь приложеніемъ этихъ формулъ къ проэкціямъ стереографической, орѳографической и центральной.

§ 470. *a.) Стереографическія.* Такъ какъ въ сихъ проэкціяхъ точка зрѣнія предполагается находящеюся на поверхности шара, а плоскость перспективы проходящею чрезъ его центръ, то будетъ $a=r$, $\alpha=0$, а слѣд. формулы (15) обратятся въ

$$\left.\begin{array}{l}y=\frac{r(\cos\lambda\sin l-\sin\lambda\cos l.\cos p)}{1+\sin\lambda\sin l+\cos\lambda\cos l\cos p}\\ x=\frac{r\cos l\sin p}{1+\sin\lambda\sin l+\cos\lambda\cos l\cos p}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(16).$$

Оба эти уравненія выражаютъ длину координатъ точки для *стереографической горизонтальной проэкціи,* въ которой широта точки зрѣнія, или что все равно центральной точки карты есть λ.

Если $\lambda=0$, т. е. точка зрѣнія возьмется на экваторѣ, то проэкція обратится въ *стереографическую экваторіальную,* а урав. (16), отъ положенія $\sin\lambda=0$, $\cos\lambda=1$, въ

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{r\sin l}{1+\cos l\cos p} \\ x = \dfrac{r\cos l.\sin p}{1+\cos l\cos p} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17).$$

Наконецъ, если $\lambda=90^\circ$, т. е. точка зрѣнія помѣстится въ полюсѣ, тогда получится *полярная стереографическая,* а урав. (16) отъ положенія $\sin\lambda=1$, $\cos\lambda=0$, обратятся въ

$$y = \frac{-r\cos l\cos p}{1+\sin l},\quad x = \frac{r\cos l\sin p}{1+\sin l}\ldots\ldots(18)$$

b.) *Орѳографическая.* Въ сей проэкціи точка зрѣнія предполагается на разстояніи безконечномъ отъ шара, а плоскость перспективы проходящею чрезъ центръ земли; слѣд. здѣсь $a=\infty$, $\alpha=0$. И такъ, раздѣливъ числитель и знаменатель выраженій y и x въ урав. (15) на a, потомъ положивъ $\alpha=0$, $a=\infty$, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} y=r(\cos\lambda\sin l-\sin\lambda\cos l\cos p) \\ x=r\cos l\sin p \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(19).$$

Таковы суть выраженія координатъ *орѳографической горизонтальной проэкціи* на плоскости параллельной горизонту той точки шара, коей географ. широта есть λ.

Но если для плоскости перспективы возьмется меридіанъ тогда $\lambda=0$, $\sin\lambda=0$, $\cos\lambda=1$, а слѣд. урав. (19) будутъ соотвѣтствовать *орѳографической экваторіальной* проэкціи и получимъ

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos l\sin p \\ y=r\sin l \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20).$$

Если наконецъ для плоскости перспективы возьмется экваторъ, тогда $\lambda=90^\circ$, $\sin\lambda=1$, $\cos\lambda=0$, а слѣд. урав. (19) обратятся въ

$$\left.\begin{array}{l} x=r\cos l\sin p \\ y=-r\cos l.\cos p \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(21).$$

c.) *Центральная.* Въ сей проэкціи точка зрѣнія предполагается въ центрѣ шара, а плоскость перспективы касательною къ его поверхности, т. е. $a=0$, $\alpha=-r$. Введя эти условія въ уравненія (15), получимъ

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{r(\cos\lambda\sin l - \sin\lambda\cos l\cos p)}{\sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l.\cos p} \\ x &= \frac{r\cos l\sin p}{\sin\lambda\sin l + \cos\lambda\cos l.\cos p} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(22),$$

или для сокращенія раздѣливъ числителя и знаменателя перваго изъ сихъ уравненій на $\cos\lambda\cos l$, а 2-го на $\cos l$, найдемъ

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{r(\operatorname{tang} l - \operatorname{tang}\lambda\cos p)}{\operatorname{tang}\lambda\operatorname{tang} l + \cos p} \\ x &= \frac{r\sin p}{\sin\lambda\operatorname{tg} l + \cos\lambda\cos p} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

Эти уравненія соотвѣтствуютъ *центральной* на горизонтѣ точки, коей широта есть λ. Но если въ сихъ уравненіяхъ положимъ $\lambda=0$, случай соотвѣтствующій *экваторіальной центральной* проэкціи, тогда получимъ

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{r\operatorname{tang} l}{\cos p} \\ x &= r\operatorname{tang} p \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

Наконецъ если для плоскости перспективы, возьмемъ касательную къ полюсу, то въ урав. (22), достаточно положить $\lambda=90°$, и будетъ

$$\left.\begin{aligned} y &= -r\cot l\cos p \\ x &= r\cot l\sin p \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25).$$

Въ заключеніе остается присовокупить, что если въ урав. (15) положимъ $\alpha=0$, $a=r(1+\sin 45°)$ или $=r(1+\sqrt{\tfrac{1}{2}})$, то они очевидно будутъ соотвѣтствовать проэкціи Лагира.

ГЛАВА III.

Проэкціи Арровсмидта и Ламберта.

§ 471. Стереографическія проэкціи, какъ мы выше видѣли, значительно измѣняютъ очертанія странъ, находящихся близь краевъ карты. Недостатокъ сей, неизбѣжный впрочемъ при изображеніи на плоскости цѣлаго полушарія, подалъ поводъ Арровсмидту, при изданіи имъ атласа къ Географіи Пинкертона, употребить такую проэкцію, построеніе коей представляло бы по крайней мѣрѣ менѣе затрудненій нежели всѣ прочія. Построеніе этой проэкціи, весьма часто нынѣ употребляемой, есть слѣдующее:

Начертивъ кругъ (чер. 242), и проведя два подъ прямымъ угломъ діаметра NN′, AB, дѣлятъ какъ сіи послѣдніе, такъ и каждую полу-окружность на одинаковое число частей. На предложенномъ чертежѣ, четверти окружности и радіусы раздѣлены на 9 равныхъ частей, дабы каждая дуга представляла 10 градусовъ. Послѣ того для построенія меридіановъ, проводятъ круги чрезъ оба полюса A и B, и чрезъ послѣдовательныя точки дѣленія горизонтальнаго діаметра NN′, а для построенія параллелей, чрезъ соотвѣтствующія точки дѣленія окружности и чрезъ точки вертикальнаго діаметра AB.

§ 472. Хотя геометрія и доставляетъ средства графически опредѣлять положеніе центра круга, проходящаго чрезъ три данныя точки, однакоже дѣйствіе приметъ большую точность, если длина радіусовъ таковыхъ круговъ будетъ найдена вычисленіемъ. Принявъ центръ C, за начало координатъ и изобразивъ чрезъ β разстояніе CK центра C отъ точки K пересѣченія экватора NN′ съ однимъ изъ меридіановъ, а длину радіуса сего послѣдняго чрезъ ϱ, уравненіе этого меридіана, какъ круга, имѣющаго свой центръ на оси абсциссъ, будетъ

$$(x+\varrho-\beta)^2+y^2=\varrho^2.$$

Такъ какъ сей кругъ проходитъ также чрезъ A и B, то

$\varrho^2 = r^2 + (\varrho - \beta)^2$, гдѣ r означаетъ радіусъ AC полушарія. Сравнивъ выведенныя величины ϱ^2, а потомъ положивъ для точки K, $y=0$ и $x=\beta$, получимъ

$$\varrho = \frac{r^2}{2\beta} + \tfrac{1}{2}\beta;$$

но β или CK, представляетъ извѣстную часть величины r, какъ на прим. $\beta = \frac{r}{n}$, почему и будетъ

$$\varrho = \tfrac{1}{2} nr + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r}{n}.$$

Таково выраженіе, опредѣляющее длину радіуса ϱ меридіана проходящаго чрезъ точку K дѣленія горизонтальнаго діаметра. На прим. если NC и AC раздѣлены на 9 равныхъ частей, то для построенія меридіана, который проходилъ бы чрезъ 5-е дѣленіе K, надлежитъ положить $n = \frac{9}{5}$, откуда $\varrho = \frac{106}{90} . r = r + \frac{8}{45} r$.

Примѣнимъ вышесказанное къ черченію параллелей. Урав. круга FHF′, какъ имѣющаго свой центръ на оси y-въ, будетъ

$$x^2 + (\varrho + \beta - y)^2 = \varrho^2,$$

гдѣ ϱ означаетъ радіусъ сего круга, а $\beta=$CH. Поелику урав. круга NAN′B, есть $x^2 + y^2 = r^2$, то координаты точекъ F, F′, сѣченія его съ кругомъ параллели, найдутся чрезъ исключеніе x и y изъ обоихъ уравненій. И такъ, положивъ CD$=\gamma$, получимъ

$$2\beta\gamma - \beta^2 + 2\varrho(\gamma - \beta) = r^2,$$

откуда
$$\varrho = \frac{r^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma}{2(\gamma - \beta)}.$$

Здѣсь $\beta=$CH, $\gamma=$CD суть величины данныя, а длина радіуса ϱ параллели искомая. Какъ CH есть извѣстная часть радіуса r, на прим. $\beta = \frac{r}{n}$, а дуга NF также извѣстная часть четверти окружности NA, то будетъ $\gamma = \sin\left(\frac{90^\circ}{n}\right)$. На прим.

если $\beta = \frac{4}{9}r$, то $\gamma = r \sin 40^\circ$ или $r . 0{,}6428$; по вычисленіи найдемъ $\varrho = r . 1{,}578$. И такъ, отложимъ величину равную сему количеству отъ точки 4-го дѣленія, по направленію вертикальнаго радіуса, въ противную сторону отъ центра C, чрезъ что и опредѣлится положеніе искомаго центра круга параллели.

На тѣхъ же самыхъ началахъ чертится полярная проэкція. Меридіаны проводятся въ видѣ діаметровъ, составляющихъ одни съ другими равные углы, подобно какъ въ стереографической проэкціи, а параллели въ видѣ одноцентральныхъ равноотстоящихъ круговъ.

§ 473. Цѣль *проэкціи Ламберта* (*) заключается въ томъ, чтобы на картѣ соблюдена была относительная точность поверхностнаго содержанія земель, не обращая вниманія ни на разстоянія, ни на фигуру очертаній. Она чертится большею частію полярная, т. е. полюсъ земли помѣщается въ центрѣ карты; меридіаны изображаются въ видѣ діаметровъ, пересѣкающихся подъ равными углами, а параллели въ видѣ одноцентральныхъ круговъ, при условіи, чтобы площадь каждаго изъ нихъ равнялась поверхности сферическаго сегмента, образуемаго соотвѣтствующимъ кругомъ земной параллели. Это достигается слѣдующимъ образомъ:

Пусть r будетъ радіусъ круга карты, а R сферы имъ представляемой. Площадь перваго будетъ πr^2, а поверхность полу-сферы $2\pi R^2$; по равенству же поверхностей, получимъ

$$r^2 = 2R^2,\ r = R\sqrt{2},\ R = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

выраженія, опредѣляющія длину r по данному R и обратно.

И такъ, построивъ произвольный кругъ для изображенія на картѣ полусферы, радіусъ сей послѣдней будетъ равенъ $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ или $R = 0{,}7071 . r$. Если раздѣлимъ r на 1000 равныхъ частей, то радіусъ сферы будетъ равенъ 707 таковымъ частямъ.

(*) Пюиссанъ и многіе другіе французскіе ученые, называютъ эту проэкцію *проэкціею Лоргна*, по имени италіанскаго геометра Лоргна (Lorgna), ее усовершенствовавшаго.

Пусть $CA = R$ (чер. 240) будетъ радіусъ сферы, A полюсъ, MM' параллель, коей разстояніе отъ полюса есть дуга $AM = \Delta$ служащая широтѣ параллели дополненіемъ до 90°. Поверхность сфер. сегмента $M'AM = 2\pi Rk$, положивъ высоту $AB = k$. Если $CI = \varrho$ представляетъ радіусъ проэкціи параллели, то площадь ея будетъ $= \pi\varrho^2$. Требуется, чтобы обѣ сіи поверхности были между собою равны, а именно $\varrho^2 = 2Rk$. И такъ радіусъ ϱ есть средній пропорціональный между діаметромъ $2R$ сферы и высотою AB сфер. сегмента $M'AM$. Но какъ хорда AM, есть также средняя пропорціональная между AB и $2R$, то заключаемъ что радіусъ CI проэкціи параллели MM' равняется хордѣ AM.

Слѣд. на проэкціи, *радіусы параллелей равны хордамъ земныхъ дугъ, служащихъ полярными ихъ разстояніями.*

И такъ, начертимъ произвольный кругъ, для представленія на картѣ полушарія; послѣ того, для опредѣленія длины радіуса R сферы, возьмемъ 0,707 принятаго радіуса r (*), или что все равно, принявъ его за гипотенузу и построивъ на немъ прямоугольный равнобедренный треугольникъ; катетъ сего послѣдняго будетъ $= R$. Опишемъ радіусомъ R кругъ $CM'AM$, коего четверть окружности раздѣлимъ отъ 5 до 5 градусовъ, и означимъ послѣдовательныя точки дѣленія начиная отъ A (принимаемой за полюсъ) цифрами 5, 10, 15 .... Наконецъ радіусами равными хордамъ, стягивающимъ точку A съ каждою изъ точекъ дѣленія, опишемъ изъ C одноцентральные круги, кои изобразятъ проэкціи, параллелей, и коихъ дополненія широтъ, соотвѣтственно означены вышеупомянутыми цифрами. Такимъ образомъ, хорда дуги въ 90° будетъ радіусъ круга карты; кругъ Cid изобразитъ проэкцію параллели mm', ($Cd = Am$), и т. д. (**)

(*) Такъ на прим. если радіусъ r карты равняется 8 дюймамъ, то R будетъ $= 8 \times 0,707 = 5,656$ дюйм.

(**) Если означимъ чрезъ l широту какой либо точки M, то число градусовъ дуги AM будетъ $= 90° - l$, а длина хорды ее стягивающей будетъ $\varrho = 2R\sin(45° - \frac{1}{2}l)$; подставя $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ вмѣсто R, получимъ $\varrho = r\sqrt{2}.\sin(45° - \frac{1}{2}l)$.

Съ помощію сей формулы, можно вычислить таблицу величинъ

§ 474. Какъ поверхности сферическихъ сегментовъ равны площадямъ соотвѣтствующихъ имъ проэкцій, то и поверхности сферич. поясовъ, заключающихся между параллелями, сохранятъ на картѣ свои величины. Сверхъ того, меридіаны, изобразятся на проэкціи въ видѣ діаметровъ; слѣд. всякое пространство на сферѣ, заключающееся въ криволинейномъ четыреугольникѣ, составленномъ двумя меридіанами и двумя параллелями, сохранитъ на проэкціи свою величину, что и составляетъ цѣль проэкціи (*).

ϱ для всѣхъ параллелей отъ 5° до 5°, и потомъ начертить проэкцію не прибѣгая къ вышесказанному построенію.

(*) На проэкціи такимъ образомъ построенной можно нарисовать карту страны, помѣстивъ въ центрѣ C (чер. 239) не полюсъ, но какую нибудь другую точку земной поверхности, ибо если вообразимъ земной діаметръ, проведенный чрезъ сію точку, а потомъ принимая рядъ плоскостей, изъ коихъ однѣ проходили бы чрезъ сію прямую, а другія въ положеніи къ ней перпендикулярномъ, то произойдетъ рядъ круговъ, сходствующій съ тѣмъ, который составляется изъ меридіановъ и круговъ параллелей. А какъ діаметры, и одноцентральные круги на картѣ, будутъ представлять не меридіаны и параллели, но круги вертикальные и горизонтальные, извѣстные въ астрономіи подъименемъ *вертикаловъ* и *альмикантаратовъ*, то для означенія на картѣ положенія различныхъ предметовъ, надлежитъ по извѣстнымъ ихъ долготамъ p и широтамъ l, опредѣлить соотвѣтствующія имъ новыя координаты. Этого достигнемъ слѣдующимъ образомъ:

Пусть P (чер. 239) будетъ полюсъ, APCD первый меридіанъ, B какой нибудь земной пунктъ, C то мѣсто, на горизонтѣ коего требуется построить проэкцію, и которое должно находиться въ центрѣ карты. Проведя дуги PB, CB, большихъ круговъ, составится сферич. треуг. PCB, который надлежитъ рѣшить. Въ немъ извѣстныя части суть уг. $P=p$, $PC=90°$ — широта λ центральной точки и $BP=90°-l$, а искомыя $CB=y$ и азимутъ $C=z$. Уравненія (54), (58) и (34) сферич. тригон. обратятся здѣсь въ

$$\tang\psi=\cos p.\cot\lambda$$

$$\cos y=\frac{\sin(l+\psi)}{\cos\psi}\sin\lambda$$

$$\sin z=\frac{\sin p}{\sin l}\cos y$$

ГЛАВА IV.

Коническія проэкціи.

§ 475. Проэкціи стереографическая, Арровсмидта и Ламберта употребляются для изображенія цѣлыхъ полушарій, но не какого-либо отдѣльнаго государства, ни даже цѣлой части свѣта, потому, что въ каждой изъ нихъ очертанія всѣхъ земель, (исключая только находящихся по срединѣ карты), весьма бываютъ обезображены, а при томъ и самое построеніе сихъ проэкцій на большомъ масштабѣ довольно затруднительно. Хотя и всѣ прочія проэкціи, о коихъ будетъ говорено ниже, болѣе или менѣе измѣняютъ разстоянія между точками и видъ очертаній, однакоже такіе недостатки неизбѣжны и происходятъ отъ невозможности представить часть сферы на плоскости; въ слѣдствіе чего для составленія картъ отдѣльныхъ странъ обыкновенно предпочитаютъ тѣ проэкціи, въ которыхъ вышесказанные недостатки наименѣе бываютъ ощутительны, и которыхъ построеніе менѣе представляетъ затрудненій.

§ 476. Простѣйшая изъ всѣхъ произвольныхъ проэкцій и весьма часто употребляемая для географическихъ картъ, основана на развертываніи поверхности конуса. И въ самомъ дѣлѣ, для представленія на плоскости части сферы, между какими нибудь двумя параллелями, всего естественнѣе принять сфер. поясъ, заключающійся между ними, за поверхность усѣченнаго конуса, и потомъ его развернуть. Параллели изобразятся тогда въ видѣ одноцентральныхъ дугъ, описанныхъ изъ вершины развернутаго конуса, называемой *полюсомъ карты,* а меридіаны въ видѣ прямыхъ, проходящихъ чрезъ сію точку.

Въ слѣдствіе чего, для всякаго мѣста B, коего долгота и широта извѣстны, получится возможность опредѣлить соотвѣтствующія величины y и z, посредствомъ коихъ положеніе сего мѣста и можетъ быть означено на картѣ.

Но какъ сфер. поясъ можетъ быть принятъ за часть конуса въ томъ только случаѣ, когда параллели его ограничивающія находятся въ маломъ одна отъ другой разстояніи, то для примѣненія этого способа къ изображенію такой страны, которая имѣетъ значительное протяженіе въ широту, предполагаютъ построенный конусъ или *касательнымъ* къ параллели, проходящей чрезъ средину страны, или *пересѣкающимъ* сферу по направленію какихъ нибудь параллелей, и по проложеніи на поверхность одного изъ сихъ конусовъ дугъ меридіановъ и параллелей, развертываютъ потомъ его поверхность. Разсмотримъ отдѣльно каждый изъ сихъ двухъ случаевъ.

§ 477. Положимъ что aa' (чер. 243) представляетъ кругъ параллели, проходящей чрезъ средину изображаемой страны. Конусъ oaa' описанный около сферы и касательный по сей параллели, будетъ имѣть свою вершину o на продолженіи земной оси pp'. Для проложенія на его поверхности дугъ параллелей, отложимъ по боку oa конуса отъ точки a, части $ab, ab', bd, b'd'$.... равныя распрямленнымъ дугамъ меридіана, и чрезъ точки d, b, b', d'.... проведя рядъ плоскостей параллельныхъ къ его основанію, пересѣченія ихъ съ поверхностію конуса представятъ требуемые круги. Соединивъ же вершину o конуса съ точками f, f',.... т. е. оконечностями дугъ долготъ, взятыхъ на параллели aa', получимъ на поверхности конуса рядъ прямыхъ, кои будутъ служить проэкціями меридіановъ. Дабы потомъ развернуть поверхность этого конуса, примемъ прямую OS за меридіанъ, проходящій чрезъ средину страны, и отложивъ на ней прямую OA равную боку oa конуса, и части AB, BD, AB′, B′D′.... соотвѣтственно равныя дугамъ меридіана, или что все равно частямъ ab, bd....; дуги MM′, NN′,.... описанныя изъ точки O, и проходящія чрезъ точки A, B, D,.... изобразятъ на картѣ направленіе параллелей; а отложивъ по дугѣ MM′ отъ точки A, части AF, FF′,.... равныя длиною дугѣ af долготы, и проведя радіусы OF, OF′,.... получимъ на картѣ направленіе меридіановъ.

Такъ какъ сѣтка такимъ образомъ начерченная, изобра-

зитъ развернутую часть поверхности вышесказаннаго конуса, то очевидно, что карта будетъ имѣть строгую точность, по направленію только дугъ меридіановъ и средней параллели MM′, которая принадлежа и конусу и сферѣ, сохранитъ на картѣ настоящую свою длину; прочія же параллели NN′, QQ′.... какъ изображающія дуги круговъ находящихся внѣ сферы, будутъ длинѣе соотвѣтствующихъ имъ на сферѣ.

§ 478. Какъ для построенія сей проэкціи необходимо, чтобы длина бока *oa* конуса, а равно длина дугъ меридіана, и средней параллели, заключающихъ данное число градусовъ были извѣстны, то опредѣлимъ сіи величины принимая землю за правильный шаръ, что всегда допускается для географическихъ картъ малаго масштаба:

1.) Бокъ *oa* конуса опредѣлится изъ прямоуг-го треуг-ка aoC, изъ коего $ao = aC.\tan g\, aoC = R\cot l$, положивъ радіусъ $aC = R$, а широту aE средней параллели $= l$.

2.) Принимая землю за шаръ, длина s дуги меридіана, заключающей на прим. α градусовъ, получится изъ пропорціи:

$$180^\circ : \pi R :: \alpha^\circ : s = \frac{\alpha . \pi R}{180} \text{ (*)}.$$

И наконецъ 3-е.) Длина дуги af (чер. 243) параллели подъ широтою l, и заключающей α градусовъ, получится также изъ пропорціи

$$180^\circ : \pi ac :: \alpha^\circ : af = \frac{\alpha . \pi . ac}{180};$$

изъ прямоуг-го же треуг-ка aCc имѣемъ

$$ac = R\cos l,$$

а посему $$af = \frac{\alpha . \pi R\cos l}{180} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

(*) При составленіи картъ на большомъ масштабѣ, надлежитъ обращать вниманіе на сжатость земли, и тогда невозможно принимать дуги меридіановъ за величины между собою равныя. Въ семъ случаѣ бокъ *oa* конуса будетъ $= N\cot l$, (гдѣ N нормаль параллели aa'), а длины дугъ меридіановъ опредѣлятся по форм. (19) § 193. (См. въ концѣ II-й части, табл. II).

§ 479. Найдемъ градусную величину угла $AOF=\theta$, для коего длина дуги AF, равнялась бы дугѣ af. Изъ круговаго сектора AOF, будетъ

$$180^\circ : \pi . AO :: \theta : AF = \frac{\theta . \pi . AO}{180};$$

но AO или $ao = R \cot l$, а сверхъ того дуга AF по условію равна дугѣ af, посему приравнявъ 2-ю часть урав. (1) со 2-ю частію послѣдняго, получимъ

$$\frac{\alpha \pi R \cos l}{180} = \frac{\theta \pi . R \cot l}{180}$$

или

$$\alpha \cos l = \theta \cot l,$$

откуда

$$\theta = \alpha \sin l.$$

И такъ, число θ градусовъ угла, составленнаго на проэкціи среднимъ меридіаномъ съ другимъ, отстоящимъ отъ него на α° долготы, будетъ равно произведенію этаго числа α градусовъ на синусъ широты средней параллели.

§ 480. Такъ какъ полюсъ O карты по большей части упадаетъ на весьма значительное разстояніе отъ верхняго края листа, то и проведеніе одноцентральныхъ дугъ непрерывнымъ движеніемъ, дѣлается невозможнымъ. Въ подобныхъ случаяхъ принимаютъ средній меридіанъ (чер. 245) за ось x-въ, точку A (т. е. пересѣченіе его съ среднею параллелью) за начало прямоугольныхъ осей, и опредѣляютъ координаты точекъ пересѣченія всѣхъ меридіановъ съ верхнею и нижнею параллелью. Для опредѣленія координатъ, на прим. точки Q, т. е. $QG=y$, $AG=x$, должно рѣшить прямоуг. треуг. QGO, по извѣстному боку $OQ=AO-AD$, и углу θ; получимъ $QG = OQ . \sin\theta$, $OG=OQ . \cos\theta$; послѣ чего $y=OQ . \sin\theta$, $x = AO - OQ . \cos\theta$.

§ 481. Разсмотримъ теперь проэкцію, въ которой конусъ пересѣкаетъ сферу по направленію двухъ круговъ параллелей. Пусть ac, $a'c'$ (чер. 244) будутъ радіусы сихъ круговъ, и l, l', соотвѣтствующія ихъ широты. Вершина o конуса, будетъ какъ и прежде находиться на продолженіи земной оси CP; бокъ его ao найдется изъ подобныхъ треуг-въ aco, $a'c'o'$, въ коихъ

$$ac : a'c' :: ao : a'o,$$

откуда $ac - a'c' : ac :: ao - a'o$ или $a'a : ao = \frac{aa'.ac}{ac - a'c'}$;

но $ac = R\cos l,\ a'c' = R\cos l'$,

посему $ao = \frac{aa'.\cos l}{\cos l - \cos l'} = \frac{aa'\cos l}{2\sin\frac{1}{2}(l+l')\sin\frac{1}{2}(l-l')} \ldots\ldots (2).$

Опредѣливъ такимъ образомъ бокъ ao конуса, по извѣстной хордѣ aa', стягивающей дугу, заключающее данное число $l'-l$ градусовъ меридіана, самое построеніе проэкціи будетъ сходно съ вышепредложеннымъ, а именно: проведя средній меридіанъ OS (чер. 243), описываютъ изъ точки O радіусами $OD' = oa$, $OD = oa'$, дуги RR′, QQ′, кои и изобразятъ направленіе параллелей ac, $a'c'$; потомъ раздѣливъ DD′, на столько равныхъ частей, чтобы число проведенныхъ чрезъ точки дѣленія одноцентральныхъ дугъ, соотвѣтствовало числу требуемыхъ параллелей, останется по дугѣ RR′ или QQ′ отложить части, равныя длинѣ дугѣ долготы параллели ac (чер. 244) или $a'c'$, и потомъ чрезъ точки дѣленія провести меридіаны.

§ 482. Должно при семъ замѣтить, что проэкція такимъ образомъ построенная, будетъ имѣть точность только по направленію параллелей RR′, QQ′, по которымъ конусъ пересѣкаетъ сферу. Дуги меридіановъ на проэкціи, очевидно будутъ короче нежели на сферѣ, ибо линія DD′ берется равною хордѣ aa' меридіана. Тоже самое должно сказать въ разсужденіи параллелей, заключающихся между дугами RR′, QQ′; а прочія параллели, находящіяся внѣ сихъ послѣднихъ будутъ длиннѣе, ибо первыя изобразятъ дуги круговъ, находящихся на той части поверхности конуса, которая вписана въ сферѣ, а другія будутъ соотвѣтствовать дугамъ круговъ конуса, лежащимъ внѣ оной. Можно однакоже доставить картѣ вѣрность по направленію дугъ меридіановъ, коль скоро въ выраженіе (урав. 2) бока ao (чер. 244) конуса, вмѣсто хорды aa', внесемъ длину дуги aa' меридіана, а на проэкціи часть DD′ сдѣлаемъ равною сей распрямленной дугѣ, ибо тогда проэкція представитъ развернутую поверхность не конуса aco; но конуса aco', въ коемъ aa''=дугѣ aa', а прямая $a''c'' = a'c'$, что очевидно.

Развертывая такой конусъ доставится картѣ болѣе точности, чѣмъ при развертываніи конуса касательнаго къ сферѣ, ибо въ первомъ случаѣ на картѣ была бы соблюдена точность лишь по направленію одной средней параллели, а здѣсь она сохранится по направленію двухъ крайнихъ. Астрономъ Делиль, при составленіи географической карты Россіи, предпочелъ сію проэкцію всѣмъ прочимъ. Желая доставить длинѣ градусовъ долготъ на картѣ еще бо̀льшую точность, онъ предположилъ конусъ, проходящій чрезъ двѣ параллели, находящіяся въ равномъ разстояніи, какъ отъ средней, такъ и отъ одной изъ крайнихъ. Такъ какъ карта долженствовала представлять пространство заключающееся между 40 и 70 градусами широты, то широта средней параллели была 55°, а широта тѣхъ, по коимъ конусъ пересѣкалъ сферу, равнялись 47° 30′ и 62° 30′.

§ 483. Въ заключеніе считаемъ полезнымъ предложить приближенный способъ построенія сего рода проэкціи, въ тѣхъ случаяхъ, когда вся сѣтка можетъ помѣститься на одномъ листѣ бумагѣ, и когда не желаютъ прибѣгнуть къ способу координатъ для нанесенія точекъ пересѣченій меридіановъ съ параллелями:

Проведя чрезъ средину бумаги прямую NS (чер. 251), и принявъ ее за средній меридіанъ, надлежитъ отложить по масштабу дуги широтъ ab, bc, ab', $b'c'$ .... равныя на прим. одному градусу. Потомъ, избравъ точки дѣленій b и b', равно отстоящія какъ отъ центра a карты, такъ отъ верхняго и нижняго края оной, должно описать изъ нихъ сперва дуги de, $d'e'$, радіусами равными соотвѣтствующимъ дугамъ долготы а потомъ дуги $e'b'e'$ и cbe радіусомъ равнымъ длинѣ bb'. Наконецъ изъ точекъ e' и e, тѣмъ же самымъ радіусомъ пересѣчь дуги de и $d'e'$ въ точкахъ d, d', а раздѣливъ части de, $d'e'$ по поламъ, провести прямыя bf, $b'f'$, ff'. Останется построить трапецію $fmm'f'$, равную трапеціи $bff'b'$, и провести чрезъ точки дѣленій средняго меридіана прямыя cq, ag, $c'q'$ параллельно bf и $b'f'$ и т. д.

Сѣтка такимъ образомъ построенная, очевидно изобразитъ развернутую часть поверхности конуса, сходнаго съ взятымъ

Делилемъ (см. § 482), ибо меридіаны на ней представляются въ видѣ прямыхъ, дуги широтъ сохраняютъ точную свою длину, а изъ дугъ долготъ точную длину имѣютъ только тѣ, кои находятся на параллеляхъ *mbm* и *m′b′m′*.

—

ГЛАВА V.

Проэкціи Флемстида и Бонна.

§ 484. Въ проэкціи, Флемстида (Flamsteed) всѣ параллели изображаются въ видѣ прямыхъ параллельныхъ и отстоящихъ однѣ отъ другихъ, въ томъ же содержаніи, въ какомъ онѣ находятся на поверхности земли; меридіанъ, проходящій чрезъ средину страны, въ видѣ прямой къ нимъ перпендикулярной; прочіе же меридіаны въ видѣ кривыхъ, кои пересѣкая параллели, образуютъ на нихъ линіи равныя распрямленнымъ дугамъ долготы. И такъ, проведя прямую AB (чер. 247), (для изображенія средняго меридіана), возьмемъ по масштабу части *ab, bc, cd*.... соотвѣтствующія градусамъ широтъ (см. таб. II), и чрезъ точки *a, b, c*.... дѣленія, проведемъ прямыя MN, PQ, RS.... перпендикулярныя къ AB, коими и изобразятся круги параллелей. Послѣ чего, взявъ по масштабу части *am, bp, cr*,... соотвѣтствующія дугамъ долготы на сихъ параллеляхъ (см. таб. III), проведемъ ломаную линію *mpr*,... которая и изобразитъ направленіе меридіана, отстоящаго отъ средняго на 1° долготы. Наконецъ взявъ части $mo=ma$, $pq=pb$, $rl=rk$,... и проведя ломаную *oql*.... получимъ на проэкціи направленіе слѣдующаго меридіана и т. д.

Руководствуясь тѣмъ же правиломъ построенія, меридіаны и параллели очевидно могутъ быть проведены отъ 2° до 2°, или отъ 5° до 5°, или отъ 30′ до 30′ и проч.

§ 485. Поэлику эта проэкція употребляется для географическихъ картъ, составляемыхъ на весьма маломъ масштабѣ, то

сфероидальность земли будетъ въ оныхъ не ощутительна, и тогда можно исполнять построеніе проэкціи, безъ предварительнаго опредѣленія длины градусовъ широтъ и долготъ въ линейной мѣрѣ, а именно: отложивъ на среднемъ меридіанѣ, произвольныя, но равныя между собою части *ab*, *bc*, *cd*.... надлежитъ одну изъ сихъ частей, какъ изображающую градусъ меридіана, (который будетъ въ слѣдствіе нашего условія равенъ градусу экватора), принять за единицу, и въ доляхъ оной опредѣлить длины *am*, *bp*, *cr*,...дугъ долготъ, слѣдующимъ образомъ:

Пусть BD, B′D′ (чер. 255), будутъ радіусы двухъ круговъ параллелей на земномъ шарѣ подъ широтами l и l'. Окружности содержатся какъ радіусы, и какъ BD есть синусъ дуги BP (точка P представляетъ полюсъ), или косинусъ широты l точки B, то

$$\frac{\text{окр. BD}}{\text{окр. B'D'}}=\frac{\cos l}{\cos l'}.$$

И такъ, *двѣ дуги параллелей, заключающія одинаковое число градусовъ, содержатся какъ косинусы ихъ широтъ.* Возьмемъ одну изъ сихъ дугъ на экваторѣ: такъ какъ въ семъ случаѣ $\cos l'=1$, то будетъ

дуга D град. парал. $=\cos l\times$ *дугу экват.* или $=\cos l\times$ *дугу мерид. имѣющую* D *градусовъ.*

Но какъ на картѣ, для части *ab* (чер. 247) представляющей сію дугу D градусовъ меридіана, взята длина произвольная, на прим. равна 1000 частямъ, то для опредѣленія длины дугъ параллелей, входящихъ въ проэкцію, надобно только косинусы соотвѣтствующихъ широтъ умножать на 1000.

§ 486. Если сравнимъ сію проэкцію съ коническою проэкціею, то легко замѣтимъ, что какъ выгоды, такъ и недостатки въ нихъ противоположны, ибо въ одной точность соблюдается лишь по направленію всѣхъ параллелей, а въ другой по направленію меридіановъ. Проэкція Флемстида съ пользою можетъ быть употреблена для изображенія экваторіальныхъ странъ; для прочихъ же будетъ неудобна, ибо четыреугольники, образуемые на ней меридіанами и параллеля-

ми, по мѣрѣ удаленія своего отъ средняго меридіана, становятся чрезмѣрно косоугольными, а чрезъ то очертанія странъ весьма обезображиваются. Но не взирая на этотъ недостатокъ, она замѣчательна тѣмъ, что поверхностное содержаніе земель на ней сохраняется.

§ 487. Противоположные недостатки проэкцій коничесской и Флемстидовой, подали поводъ французскому полковнику Бонну, предложить такую (*), на которой бы параллели были представлены въ видѣ одноцентральныхъ круговъ, подобно какъ въ конической, а меридіаны въ видѣ кривыхъ, кои пересѣкая сіи круги, образовали бы части соотвѣтственно равныя дугамъ долготы, подобно какъ въ проэкціи Флемстида. Эта проэкція, называемыя французами исправленною проэкціею Флемстида, а у насъ по имени ея изобрѣтателя проэкціею Бонна, принята теперь повсюду для составленія подробныхъ картъ.

Построеніе этой проэкціи, на прим. отъ 1° до 1°, заключается въ слѣдующемъ: по проведеніи прямой OS (чер. 246), представляющей средній меридіанъ, откладываютъ на ней, въ обѣ стороны отъ точки A, т. е. средины карты, части AB, BD, ... AB′, B′D′.... соотвѣтственно равныя длинѣ дугъ одного градуса меридіана; потомъ взявъ прямую AO, равную боку конуса, касательнаго къ средней параллели, подобно какъ объяснено было въ § 477, описываютъ изъ O какъ центра, дуги QQ′, NN′, MM′... проходящія чрезъ точки D, B, A, B′,... Сіи дуги изобразятъ на картѣ направленіе круговъ параллелей. Наконецъ по отложеніи, подобно какъ въ проэкціи Флемстида, на каждой изъ сихъ дугъ, частей равныхъ длинѣ одного градуса долготы, взятыхъ на соотвѣтствующихъ имъ параллеляхъ на шарѣ, соединяютъ точки одного порядка сихъ одноцентральныхъ дугъ прямыми, чрезъ что и получаютъ направленіе меридіановъ, по обѣ стороны средняго меридіана находящихся. Хотя сіи линіи представятся въ видѣ ломаныхъ, но какъ параллели можно провести въ весьма близкомъ разстояніи однѣ отъ другихъ, то части вышесказанныхъ ломаныхъ линій могутъ быть сдѣланы столь малыми, что при

(*) См. Mémor. du depôt de la guerre. T. IV, p. 14.

взаимномъ ихъ соединеніи, онѣ не будутъ различествовать отъ кривыхъ. На картахъ представляющихъ страны въ весьма большомъ масштабѣ, круги параллелей проводятъ отъ 5′ до 5′ и даже отъ 1′ до 1′, а потомъ оставляютъ тѣ только изъ нихъ, кои считаются нужными.

§ 488. Въ сей проэкціи подобно какъ въ проэкціи конической, крайнѣ бываетъ затруднительно и даже невозможно, описывать циркулемъ одноцентральныя дуги, а особенно когда карта составляется или на весьма большомъ размѣрѣ, или представляетъ страну, коей средняя параллель имѣетъ широту незначительную, ибо тогда полюсъ карты будетъ чрезвычайно отъ ней удаленъ. Въ слѣдствіе сего, для построенія проэкціи, принимаютъ среднiй меридіанъ за одну изъ осей координатъ, а прямую къ нему перпендикулярную, и проходящую чрезъ точку его пересѣченія съ среднею параллелью за другую ось, и опредѣляютъ координаты точекъ пересѣченiй всѣхъ меридіановъ со всѣми параллелями. Очевидно что способъ опредѣленія такихъ координатъ заключается въ рѣшеніи слѣдующаго вопроса:

По данной широтѣ l *и долготѣ* P *точки земной поверхности, принимаемой за эллипсоидъ вращенія, найдти длину координатъ* y *и* x, *соотвѣтствующей точки карты.*

Положимъ, что $Pbae$ (чер. 253) представляетъ меридіанъ на поверхности земли, пролегающiй чрезъ средину изображаемой страны; aa' среднюю параллель, коей широта есть λ; ao касательною при точкѣ a къ упомянутому меридіану, и слѣд. перпендикулярную къ нормали aN; m точку, коей широта есть l, а долгота $=$ P. Проведемъ, чрезъ сію точку m параллель bm, и примемъ меридіанъ $Pbae$ за главный, т. е. отъ коего считаются долготы: $l-\lambda$ выразитъ число градусовъ дуги ab, а P дуги mb. Еслибы не прибѣгая къ анализу, пожелали способами графическими означить по проэкціи Бонна обѣ вышесказанныя параллели, также какъ и положеніе точки m, то надлежало бы, сходно съ сказаннымъ выше, провести прямую OX и отложивъ на ней AO, равную длинѣ касательной oa, а потомъ отъ точки A часть AB равную распрямленной дугѣ ab=S меридіана, описать изъ точки O радіусами AO и

ОВ, дуги AA′ и BB′: первая изъ нихъ изобразитъ на картѣ среднюю параллель, т. е. подъ широтою λ, а вторая подъ широтою l. Наконецъ отложивъ отъ точки B по дугѣ BB′ часть BM, равную длинѣ дуги bm, точка M означитъ требуемую.

Предварительно замѣтимъ, что длина линій AB и AO извѣстны, ибо AB представляющая распрямленную дугу $ab=S$ меридіана, опредѣляется формулою (20) въ § 18, а именно:

$$S=A(1-e^2)\left[(1+\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{45}{64}e^4)(l-\lambda)\right.$$
$$\left.-(\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{15}{16}e^4)\sin(l-\lambda)\cos(l+\lambda)+\tfrac{15}{128}e^4\sin 2(l-\lambda)\cos 2(l+\lambda)\right].\ (*)$$

Длина же линіи $AO=ao$, которую означимъ чрезъ r, полу-

(*) Если въ сей формулѣ развернемъ скобки и вмѣсто A, e^2 и e^4 подставимъ численныя величины предложенныя въ ч. I на стр. 329, то она обратится въ

$$S=C(l-\lambda)+C'.\sin(l-\lambda)\cos(l+\lambda)+C''\sin 2(l-\lambda)\cos 2(l+\lambda)$$

гдѣ $\log C=4.7166896$, $\log C'=4.1757101-$, $\log C''=1.19033$; множитель $(l-\lambda)$ въ 1-мъ членѣ представляетъ амплитуду дуги, выраженную въ градусахъ, а S длину ея въ саженяхъ. Такъ на прим. если $\lambda=55^\circ$, $l=59^\circ 30'$, то $l-\lambda=4^\circ 30'=4^\circ,5$, $l+\lambda=114^\circ 30'$, $2(l-\lambda)=9^\circ$, $2(l+\lambda)=229^\circ$. Вотъ ходъ вычисленія:

C....	4.7166896	
$l-\lambda$...	0.6532125	
	5.3699021	.......1-й чл.=234370
C′....	4.1757101—	
$\sin(l-\lambda)$....	8.8946433	
$\cos(l+\lambda)$....	9.6177270—	
	2.6880804+	.......2-й чл.=+487,62
C″....	1.19033	
$\sin 2(l-\lambda)$....	9.19433	
$\cos 2(l+\lambda)$....	9.81694—	
	0.20160—	...........3-й чл.=—1,59
		S=234856,03 сажен.

При семъ должно замѣтить, что если данная широта l кромѣ градусовъ и минутъ заключаетъ въ себѣ и секунды, то будетъ удобнѣе въ 1-мъ членѣ амплитуду $(l-\lambda)$ вводить выраженную не въ градусахъ, но въ секундахъ, при чемъ необходимо вмѣсто вышепредложеннаго коефиціента $\log C$ брать $\log C=1.1603871$.

чится изъ прямоуг-го треуг-ка aoN, въ коемъ aN есть нормаль N подъ широтою λ, а уг. $oNa=90°-\lambda$; слѣд. будетъ

$$r=\mathrm{N}\cot\lambda\ldots\ldots\ldots\ldots(1).\ (*)$$

Примемъ теперь главный меридіанъ AO за ось x-въ, а линію AY къ нему перпендикулярную при точкѣ A за ось y-въ: искомыя координаты точки M будутъ $MQ=y$ и $AQ=x$. Изобразимъ уг. AOM, составляемый двумя радіусами BO и MO чрезъ θ. Изъ треуг-ка OQM, въ коемъ положивъ $OM=\varrho$, получимъ

$$QM=y=\varrho\sin\theta,\ OQ=\varrho\cos\theta;$$

$$x=AQ=AB+BQ=S+BO-OQ=S+\varrho-\varrho\cos\theta;$$

а посему

$$y=\varrho\sin\theta,\ x=S+\varrho(1-\cos\theta)=S+2\varrho\sin^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

Изъ сего послѣдняго уравненія можно исключить величину ϱ посредствомъ y, и будетъ

$$y=\varrho\sin\theta,\ x=S+y.\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=S+y\tan\tfrac{1}{2}\theta\ldots\ldots(2);$$

величина ϱ извѣстна, ибо $\varrho=r-S$. Само собою разумѣется, что если опредѣляемая точка лежитъ къ югу отъ средней параллели, т. е. когда $l<\lambda$, то не должно забывать во всѣ вышепредложенныя формулы вводить дугу S со знакомъ противнымъ.

И такъ, остается только найдти величину угла θ, или что все равно градусную величину дуги BM.

Если θ представляетъ число секундъ угла BOM, то длина дуги BM будетъ $BM=\varrho\theta\sin 1''$. Такимъ же образомъ, если предположимъ, что долгота P данной точки m выражена въ секундахъ, то на поверхности земли длина дуги bm будетъ $=bc'.P\sin 1''$. Здѣсь bc' означаетъ радіусъ круга параллели и

(*) При семъ должно замѣтить, что если $\lambda=0$, тогда урав. (1) даетъ $r=\infty$. И такъ, когда для средней параллели возьмется экваторъ, тогда полюсъ карты упадетъ отъ ней на безконечное разстояніе, всѣ параллели на картѣ изобразятся въ видѣ прямыхъ перпендикулярныхъ къ среднему меридіану, а слѣд. эта проэкція обратится въ проэкцію Флемстида.

опредѣляется изъ прямоуг-го треуг-ка $bc'N'$, въ коемъ bN' есть нормаль N' подъ широтою l, а уг. $bN'c'=90°-l$; слѣд. $bc'=N'\cos l$; послѣ чего дуга $bm=N'.P.\sin 1''.\cos l$. Но какъ по условію дуги долготъ сохраняютъ на картѣ свою длину, и потому $BM=bm$, то будетъ $\varrho\theta=N'.P.\cos l$, откуда

$$\theta=P\cos l.\frac{N'}{\varrho}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Отсюда заключаемъ, что для вычисленія координатъ y и x точки, коей долгота P и широта l извѣстны, надлежитъ сперва опредѣлить N и N′, потомъ радіусы r и ϱ и уг. θ; послѣ чего координаты x и y сей точки найдутся изъ уравненій (2).

§ 489. Изъ вышесказаннаго легко уже понять ходъ построенія картъ по сей проэкціи. Сначала проводятъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя AO и AY (чер. 253) чрезъ средину листа. Отъ точки A откладываютъ въ обѣ стороны по прямой AO, части AB соотвѣтствующія величинамъ S, т. е. дугамъ меридіана въ 1°, 2°, 3°.... или въ 30′, 1° 30′, 2° 0′... или въ 5′, 10′, 15′.... смотря потому отъ 1° до 1°, или отъ 30′ до 30′ или наконецъ отъ 5′ до 5′ желаютъ провести меридіаны и параллели на картѣ. Длина сихъ дугъ какъ упомянуто выше вычисляется по формулѣ предложенной въ примѣчаніи на стр. 160. Послѣ того означаютъ положеніе точекъ пересѣченій различныхъ меридіановъ съ параллелями, или вершины угловъ криволинейныхъ четыреугольниковъ, образуемыхъ проэкціями сихъ кривыхъ. Для сего вычисляютъ всѣ нормали N′ для каждой параллели, радіусы ϱ сихъ послѣднихъ, наконецъ амплитуды (градусныя величины) угловъ θ. Такимъ образомъ получатъ всѣ данныя для вычисленія координатъ y и x каждой вершины вышесказанныхъ четыреугольниковъ. Когда длина координатъ найдена, тогда для означенія на бумагѣ положенія каждой изъ требуемыхъ точекъ, откладываютъ ея абсциссу x по линіи AO отъ точки A, $AQ=x$, а соотвѣтствующую ей ординату y по линіи AY, т. е. $AG=y$; потомъ описываютъ дугу изъ точки Q радіусомъ $QM=AG$, а изъ точки G радіусомъ $GM=AQ$; точка M пересѣченія сихъ дугъ изобразитъ требуемую.

Къ сему присовокупимъ слѣдующія замѣчанія:

1-е) Для опредѣленія координатъ точекъ, находящихся на средней параллели, достаточно въ уравненіяхъ (2) подставить r вмѣсто ϱ, а въ урав. (3), сверхъ того, N вмѣсто N′ и λ вмѣсто l, при чемъ оно очевидно обратится въ $\theta = P\cos\lambda\,\frac{N}{r}$ $= P\cos\lambda\,\mathrm{tang}\,\lambda$ или $P\sin\lambda$, величину одинаковую какъ на стр. 153.

2-е) Если условимся означать долготу P точекъ, лежащихъ къ востоку отъ средняго меридіана со знакомъ +, а лежащихъ къ западу со знакомъ —, то уг. θ изъ урав. (3), а также и y изъ урав. (2) получится съ + или съ —, смотря потому, къ востоку, ли или къ западу соотвѣтствующая точка находится отъ средняго меридіана. Такимъ же образомъ вводя S со знакомъ + для точекъ лежащихъ къ сѣверу отъ средней параллели, а со знакомъ — для лежащихъ къ югу, знакъ предъ x означитъ будетъ ли опредѣляемая точка находиться къ сѣверу отъ оси y-въ или къ югу. Изъ чего слѣдуетъ, что для точекъ находящихся

въ сѣверовосточномъ углу карты, y и x будутъ съ +,
въ сѣверозападномъ » » y съ —, а x съ +,
въ юговосточномъ » » y съ +, а x съ —,
въ югозападномъ » » y съ —, и x съ —.

3-е) Координаты y и x получатся изъ уравненій (2) выраженными въ тѣхъ же самыхъ линейныхъ единицахъ, какъ и N, ϱ и S. Если y и x найдены въ саженяхъ, а масштабъ карты есть $\frac{1}{84\cdot a}$, гдѣ a выражаетъ то число саженей, какое принимается въ дюймѣ (см. § 450), то раздѣливъ y и x на a, результаты представятъ какую длину въ дюймахъ должны имѣть y и x на картѣ; послѣ чего не затруднительно уже будетъ отложить ихъ съ помощію поперечнаго масштаба на картѣ, какъ объяснено выше. Такъ на прим. если $y = 79435$ саж., $x = 37895{,}3$ саж., а масштабъ карты $= \frac{1}{126000}$, гдѣ $126000 = 84.1500$, то получатъ $y = 52{,}95$ и $x = 25{,}26$ дюйм.

4-е) Такъ какъ рѣдко случается, чтобы вся карта могла быть представлена на одномъ листѣ бумаги, то это заста-

вляетъ все пространство ею занимаемое разбивать рядами линій параллельныхъ осямъ координатъ на равные прямоугольники, какъ представлено на чер. 250, и каждый изъ нихъ изображать на отдѣльномъ листѣ бумаги, а при нанесеніи точекъ, тѣ края листа, (или собственно говоря, края рамки на немъ начерченныя), которыя обращены къ началу A осей, принимать за новыя оси координатъ. Пусть b будетъ длина основанія каждаго изъ вышесказанныхъ прямоугольниковъ (т. е. ширина листа), а h высота его (длина листа): если прокладываемая точка M должна помѣститься на листѣ, находящемся въ 3-мъ продольномъ и въ 4-мъ горизонтальномъ ряду, то будетъ y или $MQ = A'Q' + Mq = 2b + Mq$, и x или $AQ = A'G' + A'q = 3h + A'q$; послѣ чего принявъ вершину A' листа за новыя оси, останется отложить $A'g = y - 2b$ по линіи $A'y'$, и $A'q = x - 3h$ по линіи $A'f$ и потомъ чрезъ точки g и q провести линіи параллельныя краямъ листа. На прим. если листы карты дѣлаются въ 22 дюймовъ ширины, и въ 15 дюйм. высоты, а вычисленныя координаты точки, выраженныя въ дюймахъ суть $y = 55{,}47$ $x = 53{,}38$, то вычтя 44 (т. е. наибольшее кратное числа 22) изъ ординаты y и 45 (т. е. наибольшее кратное числа 15) изъ x, принимаемъ разности $55{,}47 - 44 = 11^д{,}47$ и $53{,}38 - 45 = 8^д{,}38$ за новыя координаты и откладываемъ ихъ по краямъ рамки листа какъ сказано выше.

5-е) Имѣя нанесенныя на бумагу вершины четыреугольниковъ, образуемыхъ меридіанами и параллелями, останется, сходно съ сказаннымъ на стр. 158, соединить эти точки прямыми линіями. Но какъ это возможно только въ томъ случаѣ, когда всѣ вершины какого либо четыреугольника помѣщаются на одномъ листѣ бумаги, то для проведенія прямыхъ линій между тѣми вершинами, которыя находятся на различныхъ листахъ, какъ на прим. M, M′ (чер. 250) опредѣляютъ точку r пресѣченія прямой MM′ съ краемъ листа kf. Это исполняется слѣдующимъ образомъ:

Пусть x, y, будутъ координаты точки M; x', y', координаты точки M′. Проведя прямыя $M'c$, Mc, параллельныя краямъ листа, составится прямоуг. треуг. $M'Mc$, въ коемъ

$Mc=y-y'$ и $M'c=x-x'$, и который будетъ подобенъ тре-уг-ку Mqr, а посему получится пропорція:

$$Mc : qM :: M'c : qr = \frac{qM \times M'c}{Mc}$$

или

$$qr = \frac{x-x'}{y-y'} . qM.$$

Найдя такимъ образомъ величину qr, остается отъ точки A' отложить $A'r = A'q - qr$ и соединить точку r съ M и M'.

§ 490. Изложенный нами въ § 488 способъ вычисленія координатъ, по извѣстной долготѣ и широтѣ точекъ, очевидно легко можетъ быть примѣненъ къ нанесенію положенія точекъ тригон. сѣти на листы проэкцій, ибо для этого нужно только во всѣ вышепредложенныя формулы вмѣсто l и P, послѣдовательно вносить широту и долготу, соотвѣтствующія точкамъ сѣти. Но какъ это дѣйствіе повторяемое для каждой изъ сихъ послѣднихъ доставило бы многосложныя вычисленія, то удобнѣе поступать слѣдующимъ образомъ:

Пусть $l = 56°42'33''$ будетъ широта данной точки, а $P = 15°23'27''$ ея долгота, и требуется означить ея положеніе на проэкціи, на которой меридіаны и параллели проведены отъ 5′ до 5′. Предположимъ, что четыреугольникъ ABCD (чер. 249) образуемый двумя меридіанами и двумя параллелями есть тотъ, внутри коего должна помѣститься требуемая точка, т. е. что AC и BD представляютъ параллели подъ широтою 56°40′ и 56°45′, а AB и CD меридіаны, имѣющіе долготу 15°20′ и 15°25′ (*). Рѣшеніе разсматриваемаго вопроса, очевидно состоитъ въ проведеніи параллели EF подъ широтою 56°42′33″, и въ отложеніи на ней части EM, равной дугѣ долготы въ 3′27″. Измѣримъ съ помощію поперечнаго масштаба линію AB = CD; и означимъ ея длину,

---

(*) Хотя на проэкціи Бонна длина дугъ меридіановъ возрастаетъ по мѣрѣ отдаленія ихъ отъ средняго, однако въ каждой отдѣльной трапеціи, какъ на прим. ABCD (чер. 249) безъ чувствительной погрѣшности можемъ не параллельные бока AB и CD принимать равными между собою.

выраженную въ доляхъ дюйма чрезъ α: такъ какъ она представляетъ дугу меридіана, коей амплитуда есть $5'$ или $300''$, то составится пропорція:

$$300'' : \alpha :: 2'33'' \text{ или } 153'' : \mathrm{AE} = \frac{153}{300}\alpha.$$

И такъ, отложивъ части AE и CF, равныя найденной величинѣ, соединимъ точки E и F прямою. Послѣ того если измѣримъ длину линій EF посредствомъ поперечнаго масштаба и означимъ сію длину, выраженную въ дюймахъ чрезъ β, то длина линіи EM получится изъ другой пропорціи, а именно

$$300'' : \beta :: 3'27'' \text{ или } 207'' : \mathrm{EM} = \frac{207}{300}\beta.$$

§ 491. Въ заключеніе займемся изслѣдованіемъ свойствъ проэкціи Бонна.

Пусть BM (чер. 252) будетъ на картѣ параллель, которой широта есть l; PM дуга меридіана, коего долгота отъ средняго PA есть P. Если чрезъ точку M ихъ пересѣченія проведемъ къ нимъ касательныя HM, TM, то уг. TMH изобразитъ величину угла, составляемаго данными кривыми на картѣ. Найдемъ величину этого угла.

Если C есть центръ параллели, то радіусъ CM будетъ перпендикуляренъ къ HM, а посему для опредѣленія уг. HMT, достаточно найдти величину угла $\mathrm{TMC} = u$, ибо $\mathrm{HMT} = 90^\circ - u$. Такъ какъ уг. $u = \psi - \theta$, (гдѣ ψ изображаетъ уг. MTA), то

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}\psi \cdot \operatorname{tang}\theta} \dots\dots\dots\dots (4)$$

Здѣсь уг. θ извѣстенъ по урав. (3); для опредѣленія же угла ψ, перенесемъ начало координатъ въ полюсъ C карты и будетъ

$$\mathrm{MQ} \text{ или } y = \varrho \sin\theta, \quad \mathrm{CQ} \text{ или } x = \varrho\cos\theta.$$

Но какъ MT есть касательная къ кривой, при точкѣ M, коей координаты суть y и x, то тангенсъ угла составляемаго ею съ осью абсциссъ, какъ извѣстно, есть

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{dy}{dx},$$

а слѣд. $$\tang u = \frac{dy - \tang\theta . dx}{dx + dy . \tang\theta},$$

одифференцировавъ же вышепредложенныя выраженія y и x, т. е.

$$dy = d\varrho \sin\theta + \varrho \cos\theta . d\theta \sin 1'',$$
$$dx = d\varrho \cos\theta - \varrho \sin\theta . d\theta \sin 1'',$$

и внеся эти величины въ выраженіе $\tang u$, по совершеніи всѣхъ преобразованій и сокращеній, найдемъ

$$\tang u = \varrho . \frac{d\theta \sin 1''}{d\varrho}.$$

Для опредѣленія величины $\tang u$, освобожденной отъ диффе-ренціаловъ, возьмемъ урав. (см. стр. 162)

$$rP = \varrho\theta,$$

гдѣ r означаетъ радіусъ круга параллели на земномъ сферо-идѣ подъ широтою l. Принимая долготу P постоянною, ибо она одинакова для всѣхъ точекъ меридіана PM, одифференци-руемъ это уравненіе, и получимъ

$$P . dr = \theta . d\varrho + \varrho . d\theta,$$

откуда $\varrho \frac{d\theta . \sin 1''}{d\varrho}$ или $\tang u = \left(P . \frac{dr}{d\varrho} - \theta\right) \sin 1''$.

Такъ какъ $d\varrho$, представляющій элементъ радіуса CM, рав-няется элементу дуги s меридіана, $d\varrho = ds$, то

$$\tang u = \left(P . \frac{dr}{ds} - \theta\right) \sin 1'';$$

но изъ § 174 намъ извѣстно, что $\frac{dr}{ds} = \sin l$, слѣд.

$$\left.\begin{array}{l} \tang u = (P \sin l - \theta) \sin 1'' \\ \text{или} \quad u = P \sin l - \theta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ибо уг. u въ большей части случаевъ бываетъ столь малъ, что тангенсъ его можно принимать за дугу.

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ $u = \psi - \theta$, заклю-чаемъ, что

$$\psi = P \sin l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

§ 492. Такъ какъ главныя свойства каждой кривой линіи выводится изъ положенія касательныхъ къ ней, то изслѣдуемъ урав. (6), какъ выражающее величину угла, образуемаго осью x-въ (среднимъ меридіаномъ) съ касательною къ проэкціи меридіана лежащаго подъ какою либо долготою P, чрезъ что опредѣлится всѣ свойства этой кривой.

1-е) Принимая въ урав. (6) P за постоянное, а l за перемѣнное, видимъ, что съ возрастаніемъ широты l отъ $l=0$ до $l=90°$, величина угла ψ постоянно возрастаетъ отъ нуля до P градусовъ. Слѣд. *меридіаны суть кривыя обращенныя своею вогнутостію къ среднему меридіану.* Но какъ для каждой широты l точки соприкосновенія, величина угла ψ во все не зависитъ отъ широты λ средней параллели, то заключаемъ, что гдѣ бы сія послѣдняя ни была избрана, *кривизна каждаго меридіана имѣющаго долготу* $=$ P, *остается постоянною.* Такимъ образомъ, если имѣемъ двѣ карты, и для одной изъ нихъ средняя параллель избрана подъ 40°, а для другой подъ 50° широты, то на обѣихъ картахъ меридіаны, имѣющіе одну и туже долготу, будутъ имѣть кривизну одинаковую, между тѣмъ какъ кривизна параллелей, подъ одною и тою же широтою, будетъ различная, ибо на первой онѣ будутъ описаны большими радіусами, нежели на второй.

2-е) Такъ какъ съ уменьшеніемъ l уголъ ψ также послѣдовательно уменьшается; то заключаемъ, что касательная къ меридіану пересѣкаетъ средній меридіанъ тѣмъ подъ острѣйшимъ угломъ, чѣмъ широта l точки соприкосновенія менѣе, такъ, что при $l=0$, т. е. когда сія точка возьмется на экваторѣ, касательная будетъ параллельна къ среднему меридіану; когда же $l=\lambda$, т. е. широтѣ средней параллели, тогда ψ обратится въ $P\sin\lambda$; но какъ при $l=\lambda$, урав. (3) стр. 162, обращается также въ $\theta=P\sin\lambda$ (см. § 489, 1-е), то и уг. $\psi=\theta$, а слѣд. *касательная къ меридіану при точкѣ, взятой на средней параллелѣ, проходитъ чрезъ центръ ея,* или что все тоже, сливается съ радіусомъ коимъ эта параллель описана. И такъ, при точкѣ, имѣющей широту $l<\lambda$, касательная будетъ находиться внѣ угла $ACM=\theta$, образуемаго среднимъ меридіаномъ съ радіусомъ параллели, проведеннымъ въ

точку касанія, а при $l>\lambda$ внутри сего угла, какъ представлено на чер. 252. Въ первомъ случаѣ, (т. е. когда $l<\lambda$), уг. u въ урав. $u=\psi-\theta$ получится со знакомъ —, а во 2-мъ, (т. е. когда $l>\lambda$) сей уг. u будетъ со знакомъ +, и наконецъ при $l=\lambda$ уг. u обращается въ нуль.

3-е) Принимая во вниманіе, что при возрастаніи l отъ 0° до 90°, уг. ψ также возрастаетъ отъ нуля до P, а при $l=\lambda$ онъ обращается въ θ, заключаемъ, что въ урав. $u=\psi-\theta$ при возрастаніи l отъ 0° до λ, уг. u будучи со знакомъ — уменьшается, а при возрастаніи l отъ $l=\lambda$ до $l=90^\circ$, сей уг. u перемѣнивъ знакъ увеличивается. И такъ, *по мѣрѣ какъ точка соприкосновенія далѣе отстоитъ отъ средней параллели, уг.* u *послѣдовательно возрастаетъ.* Но какъ уг. u выражаетъ на сколько именно уголъ четыреугольника образуемаго меридіанами и параллелями разнствуетъ отъ прямаго угла, то заключаемъ, что эти четыреугольники прямоугольны лишь при средней параллели, и становятся тѣмъ косоугольнѣе, чѣмъ далѣе отстоятъ отъ средней параллели.

Въ заключеніе остается замѣтить, что если подставимъ въ урав. (5) вмѣсто угла θ его величину изъ урав. (3) стр. 162, чрезъ что оно обратится въ

$$u=\mathrm{P}\left(\sin l-\cos l\,\frac{\mathrm{N}}{\varrho}\right)$$

и въ семъ уравненіи примемъ l за постоянное, то уг. u будетъ возрастать вмѣстѣ съ долготою P, а слѣд. четыреугольники, образуемые меридіанами и параллелями подъ одною и тою же широтою l становятся тѣмъ косоугольнѣе, чѣмъ далѣе отстоятъ отъ средняго меридіана. И такъ, на каждой картѣ построенной по проэкціи Бонна, вышесказанные четыреугольники *прямоугольны лишь по направленію средняго меридіана и средней параллели, а всѣ прочіе косоугольны;* наиболѣе же косоугольные суть тѣ, которые находятся въ углахъ карты, т. е. въ наибольшемъ отдаленіи отъ средняго меридіана и средней параллели.

Объяснимъ вышесказанное примѣромъ: предположимъ, что чертится проэкція Бонна для генеральной карты всей Европейской Россіи, т. е. пространства заключающагося между

параллелями подъ 42° и 68° сѣв. широты и между двумя меридіанами, отстоящими одинъ отъ другаго въ 36° долготы. Принимая за среднюю параллель, находящуюся подъ широтою $\lambda=35°$, а для длины радіуса экватора и сжатости земли, величины, предложенныя въ I части на стр. 329, опредѣлимъ уг. u, соотвѣтствующій точкѣ, лежащей къ сѣверу въ наибольшемъ отдаленіи отъ средняго меридіана и средней параллели, т. е. которой долгота $P=18°$, а широта $l=68°$. Вычисленіе даетъ: $\log N=6.4765132$, $\log N'=6.4767881$, длину дуги меридіана между 68° и 55° широты (по формулѣ въ примѣчаніи на стр. 160) $S=678902$ саж., r или $N\cot 55°=2097683$ саж., $\varrho=r-S=1418781$ саж. и уг. $\theta=14°14'48'',85$ (изъ урав. 3); послѣ того уг. $\psi=16°41'21'',50$, и наконецъ $u=2°26'32'',6$ (*).

Для точки же лежащей къ югу въ наибольшемъ отдаленіи отъ средняго меридіана и средней параллели, т. е. которой долгота $P=18°$, а широта $l=42°$, получимъ $\log N'=6.4761884$, $S=677473$ саж. (между параллелями подъ широтою 42° и 55°), $\varrho=r+S=2775156$, $\theta=14°25'45''$, $\psi=12°7'19''$ и наконецъ $u=-2°18'26''$.

И такъ углы между меридіанами и параллелями, лежащіе въ сѣверовосточномъ и сѣверозападномъ краю карты Россіи и обращенные своими вершинами къ центральной ея точкѣ, достигаютъ до 92°26'30'', а въ юговосточномъ и югозападномъ до 87°41'35''.

§ 493. Если длину весьма малой дуги меридіана подъ долготою P и широтою l означимъ чрезъ ds, а длину ей соотвѣтствующей на проэкціи чрезъ ds', то будетъ $ds'=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Подставя сюда вмѣсто dx^2 и dy^2, квадраты величинъ dx и dy, предложенныхъ на стр. 167, получимъ

$$ds'=\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2.d\theta^2}=d\varrho\sqrt{1+\left(\frac{\varrho d\theta}{d\varrho}\right)^2};$$

въ слѣдствіе же вышенайденнаго имѣемъ $\tang u=\varrho\frac{d\theta}{d\varrho}$, а посему

(*) Здѣсь u вычисленъ по формулѣ $u=P\sin l-\theta$; если же бы взяли формулу $\tang u=(P\sin l-\theta)\sin 1''$, что будетъ точнѣе, то получили бы $u=2°26'27'',3$.

$$ds' = d\varrho\sqrt{1 + \tang^2 u} = d\varrho . \sec u = \frac{d\varrho}{\cos u};$$

но $d\varrho$, представляющій элементъ радіуса CM=CB (чер. 252) можно безъ всякой погрѣшности принять равнымъ элементу ds земной дуги меридіана, а слѣд.

$$ds' = \frac{ds}{\cos u} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7).$$

Отсюда заключаемъ, что дуги меридіановъ на проэкціи болѣе дугъ соотвѣтствующихъ имъ на землѣ, возрастая въ томъ же содержаніи, въ какомъ косинусы угловъ u уменьшаются, или что все тоже, длина дугъ меридіановъ возрастаетъ, по мѣрѣ возрастанія угла u, т. е. по мѣрѣ отдаленія ихъ отъ средняго меридіана и средней параллели.

Такъ на прим. на картѣ Европейской Россіи, точки наиболѣе отдаленныя отъ средняго меридіана и средней параллели, имѣютъ долготу $=18°$, а широту $=68°$ и $42°$; но для этихъ данныхъ найдено нами было на стр. 170, $u = +2°26'30''$ и $u = -2°18'25''$. Введя сіи величины въ урав. (7), положивъ въ немъ $ds = 50000$ саж., получимъ въ 1-мъ случаѣ $ds' = 50045$, а во 2-мъ $ds' = 50041$. И такъ, наибольшая погрѣшность на картѣ въ длинѣ линій по направленію дугъ меридіановъ, величиною во 100 верстъ и лежащихъ къ сѣверу отъ средней параллели не превышаетъ 45 саж., а лежащихъ отъ ней къ югу 41 сажени.

§ 494. Положимъ, что fg (чер. 252) представляетъ на сфероидѣ безконечно малую часть геодезической линіи k, коей азимутъ съ меридіаномъ pmf равенъ z, $fg = dk$. Принимая mg за дугу параллели, изъ прямоуг-го треуг-ка mfg, будетъ

$$\tang z = \frac{mg}{mf}.$$

Положимъ далѣе, что FG, MF, MG, представляютъ проэкціи линій fg, mf, mg. Изобразимъ уг. MFG, представляющій проэкцію угла z, чрезъ z'. Такъ какъ оба эти угла по свойству проэкціи не могутъ быть между собою равны, то займемся опредѣленіемъ величины z'.

Изъ треуг-ка MFG, въ коемъ уг. $M = 90° - u$, имѣемъ

$$\sin z' : MG :: \sin G : MF;$$

но уг. $G = TMG - z' = 90^\circ + u - z' = 90^\circ - (z' - u)$, посему

$$MF.\sin z' = MG.\cos(z' - u),$$

или $$MF.\sin z' = MG.(\cos z' \cos u + \sin u \sin z'),$$

откуда $$MF - MG \sin u = MG.\cos u.\cot z'$$

$$\tang z' = \frac{\cos u}{\frac{MF}{MG} - \sin u};$$

но въ треуг-кѣ MFG, бокъ $MG = mg$, (ибо дуги параллелей сохраняютъ на проэкціи свою длину), а бокъ MF, представляющій элементъ дуги меридіана есть $MF = \frac{mf}{\cos u}$ (см. урав. 7),

посему $\frac{MF}{MG} = \frac{mf}{mg.\cos u} = \frac{1}{\tang z.\cos u}$; послѣ чего предшествующее уравненіе обратится въ

$$\tang z'(1 - \tfrac{1}{2}\sin 2u.\tang z) = \tang z.\cos^2 u \ldots\ldots(8).$$

Хотя изъ сего уравненія по извѣстному z и u можно опредѣлить соотвѣтствующій уг. z', однакоже по многосложности дѣйствія, будетъ удобнѣе вычислять уг. z', если выразимъ его рядомъ, слѣдующимъ образомъ:

По зависимости угла z' отъ величины u, примемъ z' за функцію отъ u, $z' = fu$, и разложимъ ее руководствуясь рядомъ Маклореня, по возрастающимъ степенямъ перемѣннаго u, а именно:

$$z' = fu + \left(\frac{dz'}{du}\right) u + \left(\frac{d^2 z'}{du^2}\right)\cdot\frac{u^2}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

гдѣ fu, $\left(\frac{dz'}{du}\right)$, $\left(\frac{d^2 z'}{du^2}\right)$,.... представляютъ величины, въ которыя обращается предложенная функція (урав. 8) и послѣдовательные ея дифференціалы отъ положенія $u = 0$. Совершивъ это вычисленіе, найдемъ

$$z' = z + u\sin^2 z - \tfrac{1}{2}u^2 \sin 1'' \sin 2z.\cos^2 z + \ldots\ldots\ldots(9)$$

Если u есть величина весьма малая, то можно отбросить членъ 2-го порядка, отъ чего будетъ

$$z' = z + u\sin^2 z.\ldots\ldots\ldots\ldots(10).$$

Если изобразимъ чрезъ z'_1 проэкцію азимута z_1 другой геодезической линіи, при той же точкѣ F, то равномѣрно будетъ

$$z'_1 = z_1 + u \sin^2 z_1;$$

вычтя это урав. изъ предыдущаго, получимъ

$$z' - z_1 = z - z_1 + u(\sin^2 z - \sin^2 z_1)$$

или

$$z' - z_1 = z - z_1 + u \sin(z - z_1) \sin(z + z_1)$$

Таково выраженіе угла треуг-ка тригон. сѣти, на разсматриваемой нами проэкціи.

§ 495. Найдемъ теперь какимъ количествомъ измѣняется на проэкціи длина геодезической линіи, на прим. бока k триг. сѣти. Сохраняя прежнія означенія, и принимая FG (чер. 252) за элементъ сей линіи, $FG = dk'$, изъ треуг-ка MFG будетъ

$$\sin G : MF :: \sin M : FG;$$

но уг. $G = 90° - (z' - u)$, $MF = \frac{ds}{\cos u}$ (урав. 7) и $\sin M = \cos u$, а потому

$$\cos(z' - u) . dk' = ds.$$

Послику же на поверхности земли, соотвѣтствующій треуг. mfg (чер. 252) прямоуголенъ и даетъ

$$ds = \cos z . dk,$$

то

$$\cos(z' - u) dk' = \cos z . dk.$$

По интегрированіи, будетъ

$$k' . \cos(z' - u) = k . \cos z . . . . (11).$$

И такъ, по опредѣленіи изъ урав. (9) или (10) азимута z' по данному z, найдутъ изъ уравненія (11) искомую длину линіи k'. Вычисленіе впрочемъ будетъ малосложнѣе, если сію величину k' выразимъ рядомъ, поступивъ какъ въ предшествующемъ §, а именно:

Принимая k' за функцію отъ u, $k' = fu$, разложимъ ее по теоремѣ Маклореня:

$$k' = fu + \left(\frac{dk'}{du}\right) u + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 k'}{du^2}\right) u^2 + \ldots\ldots$$

Здѣсь fu, $\left(\frac{dk'}{du}\right)$.... представляютъ величины, въ которыя обращается данная функція (урав. 11) и послѣдовательные ея дифференціалы, подставя въ нее вмѣсто z' величину выражаемую уравненіемъ (9), и потомъ во всѣхъ результатахъ положивъ $u=0$. Совершивъ эти дифференцированія и подстановки, по сокращеніи получимъ

$$k'=k(1-\tfrac{1}{2}u\sin 1''\sin 2z+\tfrac{1}{2}u^2\sin^2 1''\cos^2 z)\ldots\ldots(12)$$

чего логариөмъ будетъ

$$\log k'=\log k-\tfrac{1}{2}M\sin 1''.u\sin 2z+\tfrac{1}{2}M\sin^2 1''u^2\cos^2 z.$$

Здѣсь M означаетъ модуль, а u число секундъ; $\log(\tfrac{1}{2}M\sin 1'')$ $=\overline{6}.0223292$, $\log(\tfrac{1}{2}M\sin^2 1'')=\overline{12}.70790$.

Послѣднее урав. показываетъ, что при углѣ u положительномъ, если $z<90°$, то $k'<k$, а если $z>90°$, то $k'>k$. Если же уг. u есть отрицательный, то k' будетъ $>k$ при $z<90°$ и $k'<k$ при $z>90°$. И такъ, линіи лежащія къ сѣверу отъ средней параллели представляются на картѣ короче дѣйствительной своей величины, если азимутъ ихъ $<90°$, или $>180°$ и $<270°$ и длиннѣе, если азимутъ ихъ $>90°$ и $<180°$ или $>270°$ и $<360°$; происходитъ противное для линій лежащихъ къ югу отъ средней параллели, ибо тогда u будетъ со знакомъ —. Сверхъ того изъ того же уравненія видимъ, что при $z=90°$ или $=270°$, погрѣшность въ длинѣ линіи на проэкціи обращается въ нуль, а самая наибольшая величина погрѣшности случается въ линіяхъ, коихъ азимутъ есть 45° или 135°, или 225° или наконецъ 315°.

На прим. если принявъ за данныя, тѣ величины, кои предложены были на стр. 170, и соотвѣтствующія точкамъ карты, находящимся въ наибольшемъ отдаленіи отъ средняго меридіана и средней параллели, вычислимъ погрѣшность въ длинѣ линій k, принимая ее равною 100 вер. или 50000 саж., то получимъ

при $l=68°$ и $P=18°$ $\begin{cases} z=45°, & k'=48978, \text{ погрѣш.}=-1022 \text{ саж.} \\ z=135°, & k'=51100, \text{ погрѣш.}=+1100 \end{cases}$

при $l=42°$ и $P=18°$ $\begin{cases} z=45°, & k'=51037, \text{ погрѣш.}=+1037 \\ z=135°, & k'=49021, \text{ погрѣш.}=-\ 979. \end{cases}$

Не должно забывать, что найденные нами теперь результаты можно разсматривать какъ предѣлы погрѣшностей въ длинѣ разстояній между точками карты цѣлой Европейской Россіи; но если составляется карта одной или даже нѣсколькихъ губерній, то такого рода погрѣшности будутъ весьма незначительны.

§ 496. Всѣ вышепредложенные формулы, выводомъ коихъ мы обязаны полковнику Ганри и Пюиссану, выражая главныя свойства проэкціи, доставляютъ сверхъ того возможность наносить на листы проэкціи положеніе второкласныхъ точекъ тригоном. сѣти, не прибѣгая къ предварительному вычисленію ихъ широты и долготы, слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что точка M (чер. 248) представляетъ одну изъ точекъ 1-го разряда, нанесенную на листъ FH проэкціи посредствомъ ея координатъ x и y, и требуется означить положеніе точки M′ 2-го разряда, соединяющейся съ нею посредствомъ извѣстнаго бока k, коего азимутъ есть z. Если NM представляетъ на проэкціи направленіе меридіана, проходящаго чрезъ точку M, то уг. NMM′, въ слѣдствіе § 494, изобразитъ величину z', а длина линіи MM′ величину k' (§ 495). Какъ z', такъ и k' извѣстны по формуламъ (10) и (12). Проведя чрезъ точку M прямую Mx, параллельно среднему меридіану, или что тоже, краю FF′ листа, уг. xMM′ будетъ $=$NMM′—NMx; но NMM′$=z'$, а уг. NM$x=\psi$ (§ 491) или $=\theta+u$, а посему уг. xMM′, который изобразимъ чрезъ α, будетъ

$$\alpha=z'-\theta-u;$$

и какъ $$z'=z+u\sin^2 z \text{ (см. урав. 10)},$$

то $$\alpha=z+u\sin^2 z-\theta-u$$

или $$\alpha=z-\theta-u\cos^2 z \,\ldots\ldots\ldots\ldots (13)\ (*)$$

И такъ, если изъ точки M′, опустимъ перпендикуляръ

(*) Если данная точка M лежитъ къ югу отъ средней параллели, то при вычисленіи α по урав. (13) не должно забывать перемѣнять знакъ находящійся предъ u, а если къ западу отъ средняго меридіана, то находящійся предъ θ, что очевидно.

$M'q$ на Mx, то изъ прямоуг. треуг-ка $M'Mq$, по извѣстнымъ частямъ $MM'=k'$, и углу $M'Mx=\alpha$, получимъ

$$Mq=x_1=k'\cos\alpha,\ M'q=y_1=k'\sin\alpha \ldots\ldots\ldots (14).$$

Эти величины x_1, y_1, будучи приданы къ координатамъ x, y, точки M изобразятъ координаты искомой точки M′.

Отсюда легко видѣть, что для нанесенія точекъ триг. сѣти посредствомъ этого способа, надобно опредѣлить уг. θ и координаты x, y, соотвѣтствующія одной изъ точекъ 1-го разряда, и нанести ее положеніе на проэкцію. Послѣ того выведя изъ урав. (5) величину угла u, внести его величину въ уравненія (12) и (13), изъ коихъ по извѣстнымъ z и u, получатся k' и α. Останется потомъ рѣшить урав. (14) и найдя изъ нихъ величину x_1, y_1, и приложивъ ихъ къ координатамъ x и y точки M, отложить по масштабу, руководствуясь сказаннымъ въ § 489, 3-е.

При опредѣленіи координатъ слѣдующей точки M″, т. е. соединяющейся съ точкою M′, посредствомъ бока M′M″, безъ чувствительной погрѣшности можно принять земные меридіаны, проходящіе чрезъ точки M и M″, за прямыя параллельныя между собою, а потому по извѣстному азимуту бока MM′ при точкѣ M и по данному углу MM′M″, азимутъ бока M′M″ при точкѣ M′ опредѣлится какъ сказано было въ § 400. Послѣ чего получится возможность найдти величину угла $x'M'M''=\alpha'$, длину линіи M′M″ по формулѣ (12) и т. д.

§ 497. Въ заключеніе докажемъ, что содержаніе поверхностей четыреугольниковъ, образуемыхъ на землѣ меридіанами и параллелями, будетъ одинаково какъ и на картѣ.

Пусть Σ будетъ поверхность четыреугольника, заключающагося между двумя меридіанами, разность долготъ коихъ есть L, и между экваторомъ и параллелью подъ широтою l; а σ площадь проэкціи сего четыреугольника. Если радіусъ круга параллели на землѣ, подъ широтою l, изобразимъ чрезъ r, то окружность сего круга будетъ $2\pi r$, а поверхность пояса между сею параллелью и другою, отстоящею отъ нея на безконечно малое разстояніе будетъ $=2\pi r \,.\, ds$. Здѣсь ds означаетъ элементъ дуги меридіана. Слѣд. часть сего

пояса, заключающая L градусовъ, и служащая дифференціаломъ поверхности Σ, будетъ

$$d\Sigma = \frac{\pi r . L . ds}{180^\circ} \text{ или } = D . ds,$$

гдѣ D есть длина дуги параллели подъ широтою l, заключающей L градусовъ.

Съ другой стороны очевидно, что на проэкціи, элементъ площади σ, можно безъ чувствительной погрѣшности принимать за элементъ $BMmb$ (чер. 252), круговаго сектора BMC, коего длина дуги BM=D, а радіусъ BC=ϱ. Сей элементъ представляетъ разность подобныхъ секторовъ BMC, bmC. По причинѣ $Bb = d\varrho$, имѣемъ

$$\text{дуга } bm = \frac{D(\varrho - d\varrho)}{\varrho},$$

а посему

$$\text{сект. } BMC = \tfrac{1}{2} D\varrho, \quad \text{сект. } bmC = \tfrac{1}{2}\frac{D(\varrho - d\varrho)^2}{\varrho},$$

откуда $\text{сект. } BMC - \text{сект. } bmC = D . d\varrho,$

отбрасывая члены 2-го порядка. И такъ,

$$d\sigma = D . d\varrho;$$

но изъ самаго построенія проэкціи извѣстно, $d\varrho = ds$, слѣд.

$$d\Sigma = d\sigma.$$

Такъ какъ обѣ части сего уравненія должны быть интегрированы между одинакими предѣлами, то получимъ $\Sigma = \sigma$.

Если изобразимъ чрезъ Σ' площадь четыреугольника находящагося на землѣ между тѣми же меридіанами, и ограничиваемаго экваторомъ и параллелью подъ широтою l'; и чрезъ σ' площадь соотвѣтствующаго ему на картѣ, то докажется такимъ же образомъ, что $\Sigma' = \sigma'$; послѣ чего $\Sigma - \Sigma' = \sigma - \sigma'$, выражающее, что площади четыреугольниковъ, образуемыхъ какими бы то ни было двумя меридіанами и двумя параллелями, не измѣняютъ на картѣ своей относительной величины.

—

ГЛАВА VI.

Проэкція Меркатора.

§ 498. Мореходцы, руководствуясь въ своихъ плаваніяхъ компасомъ, слѣдуютъ не по направленію линіи геодезической, (т. е. кратчайшаго разстоянія между двумя пунктами), но по линіи, пересѣкающей меридіаны подъ равными углами. Линія эта называется *локсодромическою.* Трудность, встрѣчаемая какъ при черченіи сей линіи на какой бы то ни было изъ вышеописанныхъ проэкцій, (ибо она изобразится въ видѣ особой кривой линіи) (*), такъ и при измѣреніи по картѣ пройденнаго пути, заставила гидрографовъ для составленія морскихъ картъ прибѣгать къ построенію такихъ проэкцій, на которыхъ бы локсодромическія линіи изображались въ видѣ прямыхъ, а для сего очевидно надлежало меридіаны представлять въ видѣ прямыхъ параллельныхъ между собою.

§ 499. Простѣйшая изъ этого рода проэкцій и употребляемая только для построенія *частныхъ морскихъ картъ,* чертится слѣдующимъ образомъ: круги земныхъ параллелей изображаются въ видѣ прямыхъ параллельныхъ между собою, а меридіаны въ видѣ прямыхъ къ нимъ перпендикулярныхъ. Первыя проводятся въ томъ же самомъ разстояніи одна отъ другой, въ какомъ круги параллелей находятся на поверхности земли, а вторыя въ разстояніяхъ равныхъ распрямленной дугѣ долготы, взятой на параллелѣ, проходящей чрезъ средину изображаемаго пространства. Очевидно, что на сѣткѣ

(*) Такъ какъ на стереографическихъ проэкціяхъ, углы составляемые на сферѣ различными линіями сохраняютъ свою величину, то локсодромическая линія, будучи нанесена на стереографическую полярную проэкцію, изобразится въ видѣ логариѳмической спирали, ибо одно изъ главнѣйшихъ свойствъ сей линіи состоитъ въ томъ, что углы составляемые ею со всѣми радіусами векторами, между собою равны.

такимъ образомъ начерченной точность соблюдется лишь по направленію меридіановъ и средней параллели, а по направленію прочихъ она нарушится, ибо дуги долготъ, лежащія къ сѣверу будутъ длиннѣе, а лежащія къ югу короче соотвѣтствующихъ имъ на поверхности земли. Такъ какъ погрѣшности на картѣ въ длинѣ сихъ дугъ будутъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ далѣе онѣ отстоятъ отъ средней параллели, то при составленіи этого рода морскихъ картъ, ограничиваются изображеніемъ на нихъ лишь такого пространства, чтобы погрѣшность въ длинѣ одного градуса долготы на картѣ не превосходила одной *морской мили* или минуты экватора (*).

Если означимъ широту средней параллели чрезъ l, широту параллелей, служащихъ сѣвернымъ и южнымъ краями карты, чрезъ l' и l''; длину одного градуса долготы подъ широтами l, l' и l'' чрезъ α, α' и α'', и наконецъ длину одного градуса экватора чрезъ a, то на основаніи изложеннаго въ § 485, имѣемъ $\alpha = a\cos l$, $\alpha' = a\cos l'$, $\alpha'' = a\cos l''$. Но какъ на проэкціи всѣ дуги долготъ дѣлаются равными α, то разность $\alpha - \alpha'$ или $a\cos l - a\cos l'$ выразитъ на картѣ величину погрѣшности въ длинѣ градуса долготы подъ широтою l', а $\alpha'' - \alpha$ или $a\cos l'' - a\cos l$, таковую же подъ широтою l''. Дабы погрѣшности такого рода не превышали одной морской мили или 60-й доли экватора, надлежитъ, чтобы l' и l'' удовлетворяли уравненіямъ

$$a\cos l - a\cos l' = \tfrac{1}{60}a,\quad a\cos l'' - a\cos l = \tfrac{1}{60}a,$$

откуда $$\cos l' = \cos l - \tfrac{1}{60},\quad \cos l'' = \cos l + \tfrac{1}{60}.$$

Легко видѣть, что чѣмъ средняя параллель болѣе лежитъ къ сѣверу, тѣмъ эти предѣлы l' и l'' будутъ сближеннѣе.

500. Проэкція, о коей говорено было въ предыдущемъ §, рѣдко употребляется въ практикѣ; наиболѣе же употребляемая

(*) Градусъ экватора, равняется 15 географическимъ и 60 морскимъ милямъ, и потому то мореходцы минуту экватора или меридіана, и морскую милю принимаютъ за одну и туже длину. Сжатость земли, какъ при построеніи морскихъ картъ, такъ и при рѣшеніи всѣхъ задачь встрѣчающихся при мореплаваніи не принимается во вниманіе.

для составленія морскихъ картъ вообще есть *проэкція Меркатора.* Меридіаны представляются на ней въ видѣ прямыхъ между собою параллельныхъ и равно отстоящихъ; параллели же проводятся въ видѣ прямыхъ къ нимъ перпендикулярныхъ, и пересѣкающихъ оныя такимъ образомъ, чтобы *содержаніе на картѣ дугъ долготъ каждой изъ параллелей, къ прилежащимъ имъ дугамъ широтъ, было одинаково съ содержаніемъ соотвѣтствующихъ имъ величинъ на шарѣ.* Но какъ дуги параллелей на картѣ дѣлаются всѣ равной величины, то дуги меридіановъ должны отъ экватора къ полюсамъ возрастать въ обратномъ содержаніи уменьшенія дугъ долготъ на шарѣ.

Намъ уже извѣстно (см. § 485), что на шарѣ длины дугъ одинаковаго числа градусовъ содержатся между собою какъ ихъ радіусы; принимая землю за шаръ, а радіусъ ея $=$ 1-цѣ, получимъ для параллели, коей широта есть l, слѣдующую пропорцію:

$$1^\circ \text{ параллели} : 1^\circ \text{ экватора} :: \cos l : 1 \text{ или } 1 : \sec l.$$

Но 1° экватора $= 1^\circ$ меридіана, а потому

$$1^\circ \text{ меридіана} = 1^\circ \text{ параллели} \times \sec l.$$

Такимъ же образомъ

$$\text{дуга } 1' \text{ мерид.} = \text{дугѣ } 1' \text{ парал.} \times \sec l.$$

Слѣд. если на картѣ части BB′, CC′, DD′,.. (чер. 257) изображающія величины минуты на разныхъ параллеляхъ отъ $1'$ до $1'$, широты представлены будутъ равными части AA′, означающей минуту экватора, то AB должно быть $= AA' \times \sec 1'$, $BC = AA' \times \sec 2'$, $CD = AA' \times \sec 3' \ldots$; а разстояніе точки A на картѣ отъ какой бы то ни было параллели EE′, имѣющей широту l, т. е. длина AE будетъ

$$= AA' \times (\sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \ldots\ldots \sec l),$$

т. е. длинѣ минуты экватора, умноженной на сумму всѣхъ секансовъ отъ $1'$ до $1'$, заключающихся между 0 и l° широты.

§ 501. И такъ, для построенія Меркаторской проэкціи, на которой бы меридіаны и параллели были проведены отъ 1° до 1°, и которая бы соотвѣтствовала пространству между 0° и 5° широты, и имѣла 8° въ долготу, надлежитъ на нео-

предѣленной прямой AS отложить 8 равныхъ между собою частей AA′, A′A″,... и изъ всѣхъ точекъ дѣленія возставить перпендикуляры AF, A′F′, A″F″...; эти перпендикуляры изобразятъ направленіе меридіановъ; потомъ раздѣливъ часть AA′ на 60 долей, и принявъ одну изъ нихъ, представляющую минуту экватора, за единицу линейнаго масштаба, должно откладывать по AF части AB, AC, AD....., изъ коихъ каждая равнялась бы суммѣ секансовъ отъ 1′ до 1′, взятой послѣдовательно между 0° и 1°, 0° и 2°, 0° и 3° и т. д. Останется чрезъ точки B, C, D,.... провести другой рядъ прямыхъ параллельныхъ къ экватору AS, которыя изобразятъ на картѣ дуги параллелей.

Изъ сего явствуетъ, что для построенія сего рода проэкцій, должно необходимо составить таблицу всѣхъ меридіанальныхъ частей, соотвѣтствующихъ дугамъ широтъ (именуемыхъ *возрастающими широтами*). Эта таблица хотя и можетъ быть вычислена по вышесказанному, т. е. послѣдовательно складывая всѣ секансы отъ 1′ до 1′, однакоже для избѣжанія многосложности дѣйствія, предпочтительно употребляется интегральная формула, коей выводъ основывается на цѣли употребленія картъ. Разсмотримъ это съ нѣкоторою подробностію.

§ 502. Мы уже упомянули, что мореходцы, руководствуясь въ своихъ плаваніяхъ компасомъ, слѣдуютъ по *локсодромической* линіи, которая пересѣкаетъ меридіаны подъ равными углами.

Пусть (чер. 254) точка A будетъ мѣсто отплытія корабля, точка B мѣсто прибытія, AB линія локсодромическая, составляющая равные углы со всѣми меридіанами PK, Pg, Pf, PE и проч. Положимъ далѣе, что P представляетъ полюсъ, EK экваторъ, AC и BD крайнія параллели подъ широтами l и l', т. е. KA$=l$, EB$=l'$.

Вообразимъ себѣ, что дуга AB составлена изъ безконечнаго множества малыхъ прямыхъ линій, и что $nq=\alpha$ представляетъ одну изъ сихъ частей. Построивъ безконечно малый прямоуг. треуг. nqm, коего уг. q есть азимутъ z, постоянный по всему протяженію AB, получимъ

$$mq = \alpha \cos z, \quad nm = mq . \tan z.$$

Еслибы таковые малые треуг-ки были построены на всѣхъ вышесказанныхъ частяхъ линіи AB, то получился бы рядъ уравненій, подобныхъ предыдущимъ. Сложивъ между собою первыя изъ сихъ уравненій, сумма величинъ mq, составитъ дугу $AD = l - l'$, представляющую разность широтъ точекъ A и B; $\cos z$ будетъ въ нихъ постояннымъ множителемъ, а сумма количествъ α изобразитъ длину всего пройденнаго пути $AB = a$, почему и найдемъ

$l - l' = a \cos z =$ *пути, пройденному въ широтѣ*..........(1).

Съ другой стороны дуги fg и nm содержатся между собою какъ радіусъ R экватора къ радіусу параллели mn (§ 485), коей широту положимъ $= \lambda$; $fg : mn :: R : R\cos\lambda$, откуда $nm = fg . \cos\lambda$; посему ур. $nm = mq . \tan z$ обратится въ $fg \cos\lambda = \tan z . mq$. Дабы сложить между собою всѣ части fg, сумма коихъ есть дуга EK, надлежитъ взять сумму дробей $\frac{mq}{\cos\lambda}$, ибо $\tan z$ будетъ множителемъ постояннымъ. Но EK представляетъ разность P долготъ точекъ A и B, а потому изобразивъ сумму дробей $\frac{mq}{\cos\lambda}$ чрезъ Λ, получимъ

$$P = \Lambda \tan z.$$

Величина Λ извѣстна подъ именемъ *суммы меридіанальныхъ частей* или *возрастающихъ широтъ:* она равна интегралу вышесказанной дроби, т. е. $\int \frac{mq}{\cos\lambda}$, взятому между предѣлами A и D, или между предѣлами отъ K до A, и отъ K до D (*). И такъ, опредѣлимъ величины сихъ двухъ суммъ, которыя изобразимъ чрезъ Λ' и Λ'', а именно:

$P = (\Lambda' - \Lambda'') \tan z =$ *пройденному пути въ долготѣ*......(2).

(*) Должно при семъ замѣтить, что $\int \frac{mq}{\cos\lambda}$, или что тоже $\int mq . \sec\lambda$ представляетъ выраженіе, о коемъ было говорено на стр. 181, ибо mq есть весьма малая дуга меридіана, равняющаяся дугѣ экватора того же числа градусовъ.

Эта разность $\Lambda'-\Lambda''$ очевидно обратится въ сумму, когда экваторъ будетъ проходить между точками A и B, ибо Λ'' будетъ величиною отрицательною.

Для вычисленія Λ положимъ $\sin\lambda = x$, и получимъ

$$\Lambda = \int\frac{qm}{\cos\lambda} = \int\frac{d\lambda}{\cos\lambda} = \int\frac{dx}{\cos^2\lambda} = \int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} = \text{непер. } \log\left(\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}\right)$$

$$= \text{непер. } \log\tan g(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)$$

Поелику интегралъ долженъ быть взятъ отъ экватора на которомъ $\lambda=0$, до $\lambda=$какой нибудь широтѣ l, то

$$\Lambda = \text{непер. } \log\tan g(45^\circ + \tfrac{1}{2}l)$$

$$= \frac{1}{M}.\text{таб. } \log.\tan g(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) \text{ (см. ч. I., стр. 5).}$$

Но какъ пройденный путь a, такъ равно и уг. P обыкновенно выражаются въ минутахъ или въ морскихъ миляхъ, а въ урав. (2) P входитъ выраженнымъ въ частяхъ радіуса принятаго за 1-цу, то надлежитъ вмѣсто P подстановить P sin 1′, или что тоже вмѣсто знаменателя M взять M sin 1′. Получимъ

$$\frac{1}{M\sin 1'} = 7915',7046741\,,\quad \log = 3.8984895715\,,$$

$$\Lambda = 7915',7046741 \times \text{табл. } \log\tan g(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Такова формула, служащая для вычисленія предлагаемой здѣсь таблицы, о которой было нами упомянуто выше.

Таблица возрастающихъ широтъ.

ГРАД. ШИР.	ДЛИНЫ $\varLambda$ ВЪ МИНУТ.	РАЗН.	ШИР.	ДЛИНЫ $\varLambda$ ВЪ МИНУТ.	РАЗН.	ШИР.	ДЛИНЫ $\varLambda$ ВЪ МИНУТ.	РАЗН.
0°	00,00	60,01	30°	1888,38	69′,63	60°	4527,37	121,86
1	60,01	60,01	31	1958,01	70,37	61	4649,23	125,75
2	120,02	60,06	32	2028,38	71,15	62	4774,98	129,96
3	180,08	60,11	33	2099,53	71,95	63	4904,94	134,48
4	240,19	60,19	34	2171,48	72,81	64	5039,42	139,39
5	300,38	60,28	35	2244,29	73,70	65	5178,81	144,71
6	360,66	60,39	36	2317,99	74,64	66	5323,52	150,48
7	421,05	60,52	37	2392,63	75,63	67	5474,00	156,82
8	481,57	60,66	38	2468,26	76,67	68	5630,82	163,74
9	542,23	60,84	39	2544,93	77,76	69	5794,56	171,36
10	603,07	61,02	40	2622,69	78,90	70	5965,92	179,78
11	664,09	61,24	41	2701,59	80,13	71	6145,70	189,14
12	725,33	61,44	42	2781,72	81,37	72	6334,84	199,58
13	786,78	61,71	43	2863,09	82,73	73	6534,42	211,32
14	848,49	61,97	44	2945,82	84,12	74	6745,74	224,60
15	910,46	62,27	45	3029,94	85,61	75	6970,34	239,73
16	972,73	62,57	46	3115,55	87,16	76	7210,07	257,03
17	1035,30	62,92	47	3202,71	88,82	77	7467,10	277,47
18	1098,22	63,27	48	3291,53	90,55	78	7744,57	301,14
19	1161,49	63,65	49	3382,08	92,39	79	8045,71	329,49
20	1225,14	64,05	50	3474,47	94,34	80	8375,20	363,86
21	1289,19	64,49	51	3568,81	96,39	81	8739,06	406,40
22	1353,68	64,93	52	3665,20	98,56	82	9145,46	460,76
23	1418,61	65,46	53	3763,76	100,88	83	9605,82	531,07
24	1484,06	65,94	54	3864,64	103,33	84	10136,89	627,70
25	1550,00	66,47	55	3967,97	105,93	85	10764,59	767,92
26	1616,47	67,05	56	4073,90	108,72	86	11532,51	989,60
27	1683,52	67,64	57	4182,62	111,58	87	12522,11	1494,32
28	1751,16	68,28	58	4294,20	114,94	88	13916,43	2383,12
29	1819,44	68,94	59	4409,14	118,23	89	16299,55	

§ 503. Объяснимъ употребленіе сей таблицы примѣромъ: Построимъ Меркаторскую карту, на которой бы меридіаны и параллели были проведены отъ 1° до 1°, и которая бы соотвѣтствовала пространству, заключающему 8° долготы, между 46° и 51° широты.

Принявъ длину прямой AS (чер. 257) за ширину карты, раздѣлимъ ее сперва на 8 равныхъ частей или градусовъ долготъ, и возставимъ изъ точекъ A, A′, A″..., перпендикуляры, которые и изобразятъ направленіе меридіановъ, а потомъ каждую изъ вышесказанныхъ частей раздѣлимъ еще на 60 долей; каждая

изъ сихъ послѣднихъ изобразитъ минуту долготы, а вся прямая AS такимъ образомъ раздѣленная, послужитъ масштабомъ для остальнаго построенія карты. Поелику параллели на картѣ должны отъ экватора отдаляться въ содержаніи возрастающихъ широтъ, то приискавъ въ предложенной таблицѣ величины оныхъ для параллелей 47°, 48°, 49°....., и вычтя изъ каждой изъ нихъ возрастающую широту параллели AS, т. е. 46°, получимъ величины, кои очевидно изобразятъ въ частяхъ принятаго масштаба разстоянія на картѣ прямой AS отъ требуемыхъ параллелей, а именно:

$$AB = 3202{,}71 - 3115{,}55 = 87',16$$
$$AC = 3291{,}53 - 3115{,}55 = 175{,}98$$
$$AD = 3382{,}08 - 3115{,}55 = 266{,}53$$
$$AE = 3474{,}47 - 3115{,}55 = 358{,}92$$
$$AF = 3568{,}81 - 3115{,}55 = 453{,}26.$$

Впрочемъ такъ какъ въ 3-мъ столбцѣ таблицы, предложены разности между каждыми двумя послѣдовательными параллелями, то можно и не дѣлать сего вычисленія, ибо достаточно будетъ, если циркулемъ отложимъ $AB = 87{,}16$, $BC = 88{,}82$, $CD = 90{,}55$, $DE = 92{,}39$, $EF = 94{,}34$; послѣ чего останется провести чрезъ точки B, C, D..., прямыя параллельныя къ AS, и означить на рамкѣ карты градусы широтъ и долготъ.

§ 504. Но для практическаго употребленія масштаба AS на построенной уже картѣ, полезно изслѣдовать свойства сей проэкціи:

Положимъ, что NQ (чер. 256) представляетъ меридіанъ. Проведемъ чрезъ точку N прямую NM, составляющую съ NQ уг. N = азимуту z пути корабля; отложимъ $NM' =$ пройденному пространству a, въ частяхъ масштаба AS (чер. 257) и опустимъ изъ точки M′ перпендикуляръ M′Q′ на NQ. Изъ прямоуг-го треуг-ка NM′Q′, получимъ $NQ' = a\cos z$, откуда въ слѣдствіе урав. (1), явствуетъ, что $NQ' = l - l' =$ пройденному пути въ широтѣ. Но M′Q′ не будетъ соотвѣтствовать пути въ долготѣ.

Пусть будетъ $NQ = \Lambda' - \Lambda'' =$ разности возрастающихъ широтъ. Проведя QM параллельно къ Q′M′, изъ треуг-ка

NQM получимъ $MQ=(\mathcal{A}'-\mathcal{A}'')\tang z$, откуда, въ слѣдствіе урав. (2) происходитъ, что $MQ=P=$ разности долготъ.

И такъ, 1-е) если (чер. 257), точка n представляетъ мѣсто отплытія корабля, m мѣсто его прибытія, то mq изобразитъ разность долготъ, а nq разность широтъ.

2-е) Прямая nm измѣренная по масштабу AS, не будетъ изображать длину пути въ миляхъ. Для опредѣленія сего протяженія надлежитъ взять по масштабу AS столько минутъ или миль, сколько показываетъ на краю градусная подпись въ линіи nq. По отложеніи циркулемъ этой длины отъ точки n до q', и по проведеніи горизонтальной прямой $q'm'$, остается измѣрить длину nm' частями масштаба AS. Число минутъ, заключающихся въ сей послѣдней, изобразитъ число миль, пройденное кораблемъ по направленію nm.

§ 505. Руководствуясь вышеизложеннымъ, можно по Меркаторской картѣ рѣшать слѣдующія задачи, весьма часто встрѣчающіяся при мореплаваніи (чер. 257).

I. *По данной длинѣ пути* a *и азимуту* z, найти разность широтъ $l-l'$ и разность долготъ P.

По означеніи на картѣ точки n отплытія корабля, проведемъ неопредѣленную прямую nm, составляющую со всѣми меридіанами уг. $qnm=z$: взявъ циркулемъ по масштабу AS столько минутъ, сколько миль заключается въ пройденномъ пути a, отложимъ эту длину отъ точки n до m', и проведемъ чрезъ точку m' прямую $m'q'$ параллельно къ AS, величина nq' изобразитъ число миль пройденныхъ въ широтѣ. Наконецъ отложивъ отъ точки n часть nq, коей бы градусная величина означаемая подписью на краю карты, равнялась вышесказанному числу миль пройденному въ широтѣ, проведемъ mq параллельно къ AS; очевидно, что nq или Bi изобразитъ искомую разность $l-l'$ широтъ, а mq разность P долготъ.

II. *По данному азимуту* z, *и разности* $l-l'$ *широтъ*, опредѣлить длину a пути и разность P долготъ.

По означеніи точки n отплытія, проведемъ неопредѣленную прямую nm, составляющую съ меридіаномъ уг. z. Поелику широта мѣста прибытія извѣстна, то параллель Bmq соот-

вѣтствующая сей широтѣ въ пересѣченіи съ прямою *nm*, опредѣлитъ положеніе точки *m* прибытія. Длина *nm'* пройденнаго пространства найдется какъ и прежде, ибо надлежитъ отложить такую прямую *nq'*, которой бы длина по масштабу AS, представляла число минутъ заключающихся въ данной разности $l-l'$ широтъ и проч.

III. *По даннымъ широтамъ* l *и* l' *оконечностей и длинѣ* a *пути*, требуется найти азимутъ *z* и разность P долготъ.

Положеніе точки *n* отплытія и параллели B*mq*, на которой должна находиться точка *m* прибытія, извѣстны. Взявъ по масштабу AS разствореніемъ циркуля столько минутъ, сколько заключается ихъ въ разности широтъ, отложимъ по *nq* отъ точки *n* до *q'*; потомъ проведя неопредѣленную горизонтальную *m'q'*, изъ центра *n*, радіусомъ равнымъ по масштабу AS такому числу минутъ, сколько миль находится въ пройденномъ пути *a*, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ прямую *m'q'* въ точкѣ *m'*. Наконецъ, по проведеніи прямой *nm'm*, опредѣлится уголъ *n*, равный азимуту *z*, и положеніе точки *m*.

IV. *По данному на картѣ положенію точекъ отплытія и прибытія* n и *m*; опредѣлить длину пройденнаго пути *a* и азимутъ *z*.

Проведя прямую *nm*, уг. *n* изобразитъ искомый азимутъ *z*. Возьмемъ по масштабу AS разствореніемъ циркуля столько минутъ, сколько содержится оныхъ въ разности широтъ, и отложивъ эту длину отъ *n* до *q'*, проведемъ горизонтальную *m'q'*. Длина *nm'* измѣренная по масштабу AS, опредѣлитъ число миль пройденнаго пути *a*.

V. *Даны разность* P *долготъ и азимутъ* z. Поелику направленіе *mn* извѣстно, равно какъ и направленіе меридіана A''F'', на коемъ должна находиться точка *m* прибытія, то положеніе сей послѣдней опредѣлится, а градусная подпись соотвѣтствующая точкамъ B и *i* покажетъ, какъ велика разность широтъ. Длина же *a* найдется какъ въ предыдущей задачѣ.

VI. Наконецъ *когда* P *и* a *даны*, то *z* и $l-l'$ можно опредѣлить посредствомъ приближеннаго построенія, состоя-

щаго въ томъ, что длина *mn* измѣренная по вертикальной B*i*, предполагается заключающею въ себѣ столько миль, сколько ихъ находится въ длинѣ *a* или *nm'* измѣренной по AS. И такъ, поелику положеніе точки *n*, и меридіана A''F'' извѣстно, то изъ центра *n*, радіусомъ взятымъ на A*i*, и равнымъ длинѣ пути, описывается дуга, которая пересѣчетъ меридіанъ A''F'' въ точкѣ *m*. Останется провести прямую *nm*.

§ 506. Изъ хода построенія проэкціи Меркатора явствуетъ, что карта не имѣетъ постояннаго масштаба, и что онъ измѣняется на каждой параллелѣ. Масштабъ выражающій отношеніе длины градуса или минуты экватора на картѣ къ соотвѣтствующей ей длинѣ на поверхности земли, и служившій для построенія карты, называется *главнымъ масштабомъ;* для опредѣленія же масштаба соотвѣтствующаго какой либо иной параллели, на прим. DD' (чер. 257), предположимъ, что AA' и DD', представляютъ на картѣ дуги въ одинъ градусъ долготы одна подъ экваторомъ, а другая подъ широтою *l*, и что *a* и α выражаютъ длины сихъ дугъ на поверхности земли. Если означимъ масштабы, соотвѣтствующіе линіямъ AA' и DD' чрезъ $\frac{1}{M}$ и $\frac{1}{m}$ то вслѣдствіе § 449, получимъ

$$\frac{1}{M}=\frac{AA'}{a},\quad \frac{1}{m}=\frac{DD'}{\alpha} \text{ или } =\frac{AA'}{\alpha};$$

исключивъ отсюда AA' и не забывая, что $\alpha = a\cos l$ (см. § 485), будетъ

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{M\cos l} \text{ или } =\frac{1}{M}\sec l.$$

Такимъ же образомъ, если означимъ масштабъ другой параллели подъ широтою l' чрезъ $\frac{1}{m'}$, то найдемъ

$$\frac{1}{m'}=\frac{1}{M\cos l'} \text{ или } =\frac{1}{M}\sec l'.$$

отсюда

$$\frac{1}{m} : \frac{1}{m'} :: \sec l : \sec l'.$$

И такъ, *масштабы параллелей содержатся какъ секансы соотвѣтствующихъ широтъ.* Изъ сего заключаемъ, что если при построеніи карты для главнаго масштаба принять

былъ англ. дюймъ выражающимъ n морск. миль. и если чрезъ x означимъ длину линіи въ дюймахъ, выражающей на картѣ для параллели подъ широтою l тоже число n морскихъ миль, то $\frac{1}{n.869,49 \times 84}$ и $\frac{x}{n.869,49 \times 84}$ (морск. миля $=$ 869,49 саженямъ) выразятъ масштабы $\frac{1}{M}$ и $\frac{1}{m}$ подъ широтою $0°$ и l, и будетъ

$$\frac{1}{M} : \frac{1}{m} \text{ или } 1 : x :: 1 : \sec l$$

откуда $$x = \sec l.$$

Слѣд. въ разсматриваемомъ нами случаѣ для построенія линейныхъ масштабовъ, достаточно длину секанса, соотвѣтственно широтѣ каждой параллели, отложить въ доляхъ дюйма, и всякая изъ такихъ линій представитъ тоже самое число морскихъ миль, сколько принято было ихъ въ дюймѣ при построеніи карты.

ПРИБАВЛЕНІЕ

КЪ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗІИ.

=

I.

Общая теорія прожкцій Гаусса.

§ 507. Свойство какой бы то ни было криволинейной поверхности опредѣляется уравненіемъ между координатами x, y, z, каждой изъ ея точекъ. Всякую изъ сихъ перемѣнныхъ можно разсматривать въ уравненіи какъ функцію двухъ другихъ. Но для рѣшенія вопросовъ, относящихся вообще къ криволинейнымъ поверхностямъ будетъ удобнѣе, если вве-

демъ еще двѣ перемѣнныя t и u, и каждую изъ координатъ x, y, z, выразимъ въ функціи отъ t и u. Въ семъ случаѣ, всякой парѣ величинъ t и u будетъ соотвѣтствовать точка поверхности и обратно.

Условимся подъ X, Y, Z, T, U, разумѣть, въ разсужденіи другой криволинейной поверхности, величины, имѣющія тѣже самыя значенія, какъ сказано выше. Для изображенія первой поверхности на второй достаточно выразить T и U въ функціи отъ t и u. И дѣйствительно, какая бы эта функція ни была, можно будетъ опредѣлять величины T и U по даннымъ t и u, а вмѣстѣ съ тѣмъ и координаты X, Y, Z, точки, которая будетъ соотвѣтствовать находящейся на поверхности изображаемой. Но если при составленіи изображенія, требуется, чтобы оно выполняло какому либо особому условію, то вышесказанная функція не будетъ произвольною, и будетъ зависѣть отъ тѣхъ свойствъ, которыя требуются отъ изображенія. Займемся отысканіемъ, какой видъ должна имѣть функція, чтобы малѣйшія части составляемаго изображенія, были подобны съ соотвѣтствующими частями даннаго.

§ 508. Изъ анализа о трехъ измѣреніяхъ извѣстно, что кратчайшее разстояніе s между какими бы то ни было точками M, M′, коихъ координаты суть x, y, z и x', y', z', выражается уравненіемъ

$$s=\sqrt{\left\{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right\}}$$

Если предположимъ, что обѣ разсматриваемыя точки лежатъ на криволинейной поверхности и находятся въ безконечно близкомъ между собою разстояніи, то будетъ $x'=x+\mathrm{d}x$, $y'=y+\mathrm{d}y$, $z'=z+\mathrm{d}z$, чрезъ что вышесказанное урав., которое въ семъ случаѣ выразитъ линейный элементъ на поверхности, обратится въ

$$s=\sqrt{\left\{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right\}}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Пусть данныя уравненія, выражающія свойства поверхности будутъ

$$x=f(t,\ u),\ \ y=f_1(t,\ u),\ \ z=f_2(t,\ u).$$

Дифференцированіе оныхъ даетъ

$$dx = a.dt + a'du$$
$$dy = b.dt + b'du$$
$$dz = c.dt + c'du$$

гдѣ $a = \frac{d.f(t,\ u)}{dt}$, $a' = \frac{df(t,\ u)}{du}$, $b = \frac{df_1(t,\ u)}{dt}$, и т. д.

Подставя въ урав. (1) вмѣсто dx, dy, dz, найденныя нами величины получимъ

$$s = \sqrt{\left\{(a^2+b^2+c^2)dt^2+2(aa'+bb'+cc')dt.du+ (a'^2+b'^2+c'^2)du^2\right\}} \dots\dots\dots\dots (2).$$

Такимъ же образомъ, если $x''=x+\delta x$, $y''=y+\delta y$ и $z''=z+\delta z$, суть координаты третьей точки M'', то разстояніе $MM''=s'$ выразится чрезъ

$$s' = \sqrt{(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2)}$$

или

$$= \sqrt{\left\{(a^2+b^2+c^2)\delta t^2+2(aa'+bb'+cc')\delta t.\delta u+ (a'^2+b'^2+c'^2)\delta u^2\right\}}$$

гдѣ a, a', b, b',... очевидно суть тѣже самыя какъ и прежде.

Наконецъ для разстоянія s'' между точками M' и M'', найдемъ

$$s'' = \sqrt{\left\{(dx-\delta x)^2+(dy-\delta y)^2+(dz-\delta z)^2\right\}};$$

послѣ чего косинусъ угла M безконечно малаго треуг-ка MM'M'', будетъ

$$\cos M = \frac{s^2+s'^2-s''^2}{2ss'} = \frac{dx.\delta x+dy.\delta y+dz.\delta z}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}.\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2)}}.$$

Перейдемъ теперь къ другой поверхности и предположимъ, что координаты X, Y, Z, одной изъ ея точекъ, выражаются посредствомъ уравненій $X=F(t,\ u)$, $Y=F_1(t,\ u)$, $Z=F_2(t,\ u)$, дифференціалы которыхъ суть

$$dX = A.dt + A'.du,$$
$$dY = B.dt + B'.du,$$
$$dZ = C.dt + C'.du.$$

Длина S линейнаго элемента выразится чрезъ

$$S=\sqrt{(dX^2+dY^2+dZ^2)}$$

или

$$=\sqrt{\left\{(A^2+B^2+C^2)dt^2+2(AA'+BB'+CC')dt.du+(A'^2+B'^2+C'^2)du^2\right\}}\ldots\ldots\ldots(3)$$

Очевидно, что для выраженія длины другаго линейнаго элемента, соединяющаго первую точку съ третьею, достаточно, въ уравненіи, выражающимъ s' вмѣсто малыхъ буквъ алфавита подставить большія, и т. д.

Такъ какъ по условію вопроса требуется, чтобы весьма малый треуг., образуемый линіями на первой поверхности былъ подобенъ соотвѣтствующему на второй, то будетъ

$$\frac{S}{s}=\frac{S'}{s'}=\frac{S''}{s''},$$

или означая это содержаніе чрезъ m, получимъ

$$S=ms,\ S'=ms',\ S''=ms''.$$

Первое изъ сихъ уравненій по внесеніи въ него вмѣсто S и s величинъ выражаемыхъ уравненіями (2) и (3), даетъ

$$\left.\begin{array}{l}[(A^2+B^2+C^2)-m^2(a^2+b^2+c^2)]dt^2\\ +2[(AA'+BB'+CC')-m^2(aa'+bb'+cc')]dt.du\\ +[(A'^2+B'^2+C'^2)-m^2(a'^2+b'^2+c'^2)]du^2\end{array}\right\}=0$$

Это уравненіе должно независѣть отъ dt и du, а потому заключаемъ что коефиціенты предъ dt^2, $dt.\,du$ и du^2, по одиначкѣ должны равняться нулю, или что все равно

$$A^2+B^2+C^2=m^2(a^2+b^2+c^2)$$
$$AA'+BB'+CC'=m^2(aa'+bb'+cc')$$
$$A'^2+B'^2+C'^2=m^2(a'^2+b'^2+c'^2).$$

Количество m, выражающее содержаніе между соотвѣтствующими линіями, незначительной длины, на обѣихъ поверхностяхъ, измѣняется для различныхъ частей изображенія, ибо m есть функція отъ t и u. Но еслибы для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, m оказалось постояннымъ, то заключили бы, что изображенія подобны между собою какъ въ цѣломъ, такъ и въ подробностяхъ; а еслибы оно было равно 1, то изображенія на обѣихъ поверхностяхъ были бы между собою

равны, а слѣд. одна изъ поверхностей могла бы быть развернута на другой.

§ 509. Положивъ для сокращенія $a^2+b^2+c^2=\alpha$, $aa'+bb'+cc'=\beta$, $a'^2+b'^2+c'^2=\gamma$ и $s^2=\omega$, урав. (2) обратится въ

$$\alpha.\mathrm{d}t^2+2\beta.\mathrm{d}t.\mathrm{d}u+\gamma.\mathrm{d}u^2=\omega$$

или
$$\alpha^2.\mathrm{d}t^2+2\alpha\beta.\mathrm{d}t.\mathrm{d}u+\alpha\gamma.\mathrm{d}u^2=\alpha\omega.$$

Для интегрированія этого уравненія должно сперва положить $\omega=0$, а потомъ разложить его на два линейные множителя, изъ коихъ одинъ очевидно будетъ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\mathrm{d}t+(\beta+i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2})\mathrm{d}u=0\\ \text{а другой}\quad \alpha.\mathrm{d}t+(\beta-i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2})\mathrm{d}u=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

гдѣ i означаетъ $\sqrt{-1}$. Двучленъ подъ радикаломъ всегда будетъ положительный, какъ въ этомъ удостовѣримся, если вмѣсто α, β и γ, подставимъ ихъ величины, ибо тогда, по сокращеніи, получимъ $\alpha\gamma-\beta^2=(ab'-a'b)^2+(ac'-a'c)^2+(bc'-b'c)^2$.

Такъ какъ изъ интегральнаго вычисленія извѣстно, что при интегрированіи дифференціальнаго уравненія между двумя перемѣнными, вводится, такъ называемый, интегральный множитель, то означивъ его для перваго изъ уравненій (5) чрезъ R, а для втораго чрезъ R′, и положивъ, что интегралъ одного есть $p+iq=$*постоян.*, а другаго $p-iq=$*постоян.*, получимъ

$$\alpha.\mathrm{d}t+(\beta+i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}).\mathrm{d}u=\frac{1}{\mathrm{R}}(dp+idq)$$

$$\alpha\mathrm{d}t+(\beta-i\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2})\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\mathrm{R}'}(\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q).$$

Перемноживъ сіи уравненія одно на другое, и по причинѣ, что произведеніе первыхъ частей оныхъ равно $\alpha\omega$, будетъ

$$\omega=h(\mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

положивъ для сокращенія $h=\frac{1}{\alpha\mathrm{RR}'}$, гдѣ h есть конечная функція отъ t и u.

Поступая съ урав. (3) такимъ же образомъ какъ съ урав. (2), а именно: положивъ

$$dX^2+dY^2+dZ^2=\Omega,$$

и выразивъ dX, dY, dZ въ функціи отъ t, u, dt и du, а потомъ для интегрированія $\Omega=0$, разложивъ его на два линейные множителя, убѣдимся, что интегралы ихъ будутъ имѣть видъ:

$$P+iQ=\textit{постоян.},\ P-iQ=\textit{постоян.}$$

послѣ чего

$$\Omega=H(dP^2+dQ^2)\dots\dots\dots\dots(7)$$

гдѣ H есть также конечная функція отъ t и u.

Но въ слѣдствіе требуемой пропорціональности линейныхъ элементовъ, мы видѣли, что $S=ms$, или

$$\Omega=m^2\omega.$$

Внеся сюда вмѣсто Ω и ω найденныя нами величины, получимъ

$$m^2h(dp^2+dq^2)=H(dP^2+dQ^2),$$

откуда

$$\frac{m^2h}{H}=\frac{(dP+idQ)(dP-idQ)}{(dp+idq)(dp-idq)}\dots\dots\dots(8).$$

Очевидно, что числитель во 2-й части этого уравненія, въ томъ только случаѣ раздѣлится на свой знаменатель, когда

dP+idQ дѣлится на dp+idq, и dP—idQ на dp—idq,

или, когда

dP+idQ дѣлится на dp—idq и dP—idQ на dp+idq.

Въ 1-мъ случаѣ, dP+idQ обратится въ нуль, когда $dp+idq=0$, или что все равно P+iQ будетъ количество постоянное, когда $p+iq$ принято будетъ за постоянное; это же значитъ, что P+iQ должно быть функціею отъ $p+iq$. Такимъ же образомъ заключимъ, что P—iQ должно быть функціею отъ $p-iq$. Означимъ обѣ сіи функціи чрезъ f, f', т. е.

$$P+iQ=f(p+iq),\ P-iQ=f'(p-iq)\dots\dots(9).$$

Очевидно, что обѣ функціи f и f' должны имѣть одинаковый видъ, ибо выраженія $p+iq$ и $p-iq$ различествуютъ одно отъ другаго только знакомъ предъ i, и потому для рѣ-

шенія вопроса, имѣющаго цѣлію опредѣлить P и Q, послужитъ одно только уравненіе

$$P+iQ=f(p+iq)$$

гдѣ P очевидно равняется вещественной, а iQ мнимой части функціи.

§ 510. Если означимъ чрезъ φ и φ' тѣ функціи, которыя происходятъ отъ дифференцированія произвольныхъ функцій f и f', т. е. $\mathrm{d}(fv)=\varphi v.\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}(f'v)=\varphi' v.\mathrm{d}v$, то уравненія (9) дадутъ

$$\mathrm{d}P+i\mathrm{d}Q=\varphi(p+iq)(\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q),\ \mathrm{d}P-i\mathrm{d}Q=\varphi'(p-iq)(\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q)$$

откуда

$$\varphi(p+iq)=\frac{\mathrm{d}P+i\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q},\quad \varphi'(p-iq)=\frac{\mathrm{d}P-i\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q};$$

послѣ чего урав. (8) обратится въ

$$\frac{m^2h}{H}=\varphi(p+iq)\,\varphi'(p-iq)$$

откуда $$m=\sqrt{\left\{\frac{H}{h}.\varphi(p+iq)\,\varphi'(p-iq)\right\}}\ldots\ldots\ldots(10).$$

Таково уравненіе опредѣляющее масштабъ каждой части изображенія, когда искомая функція найдена.

§ 511. Примѣнимъ сію теорію къ изображенію на плоскости земной поверхности, разсматривая ее какъ поверхность эллипсоида вращенія. Примемъ экваторъ за плоскость xy, а земную ось за ось z-въ. Пусть (чер. 223) M будетъ точка взятая на сей поверхности и имѣющая широту $=l$, а долготу $=t$, считаемую отъ меридіана PE лежащаго въ плоскости zx. Опустивъ изъ M на плоскость zy перпендикуляръ $MD=x$, и на земную ось PC перпендикуляръ MQ, произойдетъ треуг. MDQ, въ которомъ уг. $D=90°$, $QD=y$ и уг. $DMQ=t$, и получимъ

$$x=QM.\cos t,\ y=QM.\sin t.$$

Для опредѣленія QM замѣтимъ, что QM лежитъ въ плоскости меридіана PMI проходящаго чрезъ точку M. Положимъ, что PMI (чер. 224) представляетъ сей меридіанъ: опишемъ радіусомъ экватора $CI=A$ кругъ и продолжимъ до пересѣченія съ нимъ ординату $MG=z$. Изъ треуг-ка $CM'G$,

въ коемъ $CM'=A$, $CG=QM$ и уг. $M'CG=u=$ *приведенной широтѣ* (см. стр. 69), получимъ $QM=A\cos u$ и $M'G=A\sin u$; но $M'G^2=A^2-x^2$ и MG^2 или $z^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)=\frac{B^2}{A^2}M'G^2$, откуда $z=B\sin u$. Подставя величину QM въ выраженія x и y, получимъ для координатъ точки M, слѣдующія уравненія:

$$x=A\cos t.\cos u$$
$$y=A\sin t.\cos u$$
$$z=B\sin u.$$

Одифференцировавъ эти уравненія и подставя dx^2, dy^2 и dz^2 въ урав. $\omega=dx^2+dy^2+dz^2$, найдемъ

$$\omega=A^2\cos^2 u.dt^2+(A^2\sin^2 u+B^2\cos^2 u)du^2,$$

или $$\omega=A^2\cos^2 u[dt^2+(\text{tang}^2 u+1-e^2)du^2],$$

ибо $$B^2=A^2(1-e^2) \text{ (см. § 163).}$$

Но уже намъ извѣстно, (см. *примѣч.* на стр. 70), что

$$\text{tang}\,u=\text{tang}\,l\sqrt{1-e^2},\quad \cos u=\frac{\cos l}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)}}$$

откуда $$du=dl\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{1-e^2\sin^2 l};$$

слѣд. предшествующее урав. обратится въ

$$\omega=\frac{A^2\cos^2 l}{1-e^2\sin^2 l}\left\{dt^2+dl^2\frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2 l)^2.\cos^2 l}\right\}\ldots\ldots\ldots(11).$$

На основаніи изложеннаго въ § 509, полагаемъ $\omega=0$; послѣ чего получимъ, слѣдующіе два линейные множителя

$$0=dt\pm i\frac{(1-e^2)dl}{(1-e^2\sin^2 l).\cos l}$$

чего интегралъ будетъ (*)

$$t\pm i\log\left\{\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}l)\left[\frac{1-e\sin l}{1+e\sin l}\right]^{\frac{1}{2}e}\right\}=\textit{постоян.}\ldots(12)$$

(*) Для интегрированія выраженія $\frac{dl}{(1-e^2\sin^2 l)\cos l}$, умножаемъ числитель и знаменатель на $\cos l$, и какъ $\cos l.dl=d(\sin l)$, а $\cos^2 l=1-\sin^2 l$, то положивъ $\sin l=r$, оно обратится въ

Очевидно, что это постоянное количество выражаетъ $p \pm iq$, а множитель h въ урав. $\omega = h(dp^2 + dq^2)$ есть

$$h = \frac{A^2 \cos^2 l}{1 - e^2 \sin^2 l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (13).$$

Пусть $Z = 0$ будетъ урав. плоскости, на которой желаютъ изобразить поверхность сфероида. Выраженіе линейнаго на ней элемента (см. урав. 3) обратится въ $\sqrt{(dX^2 + dY^2)}$; слѣд. $\Omega = dX^2 + dY^2 = 0$, отсюда $X \pm iY =$ *пост.* Но какъ по урав. (9) этотъ интегралъ есть функція отъ $p \pm iq$, то получимъ

$$X \pm iY = f\left(t \pm i \log \left\{ \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2} l) \left[\frac{1 - e\sin l}{1 + e\sin l}\right]^{\frac{1}{2}e} \right\}\right) \dots (14)$$

гдѣ log означаетъ неперовъ логариѳмъ.

Если для f примемъ линейную функцію, какъ на прим. $fv = kv$, то найдемъ

$$\frac{dr}{(1 - e^2 r^2)(1 - r^2)} \text{ или } = \frac{dr}{(1 + er)(1 - er)(1 + r)(1 - r)}.$$

Приравнявъ эту величину суммѣ дробей

$$dr \left[\frac{\alpha}{1 - er} + \frac{\beta}{1 + er} + \frac{\gamma}{1 - r} + \frac{\delta}{1 + r}\right],$$

по способу неопредѣленныхъ коефиціентовъ, получимъ слѣдующія уравненія:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1, \qquad e(\alpha - \beta) + \gamma - \delta = 0,$$
$$\alpha + \beta + e^2(\gamma + \delta) = 0, \qquad \alpha - \beta + e(\gamma - \delta) = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{e^2}{2(1 - e^2)}, \ \beta = -\frac{e^2}{2(1 - e^2)}, \ \gamma = +\frac{1}{2(1 - e^2)}, \ \delta = +\frac{1}{2(1 - e^2)}$$

Послѣ чего

$$\int \frac{dr}{(1 - e^2 r^2)(1 - r^2)} = \frac{1}{2(1 - e^2)} \left\{ \int \frac{dr}{1 + r} + \int \frac{dr}{1 - r} - e^2 \int \frac{dr}{1 - er} - e^2 \int \frac{dr}{1 + er} \right\}$$
$$= \frac{1}{2(1 - e^2)} \left\{ \log(1 + r) - \log(1 - r) + e\log(1 - er) - e\log(1 + er) \right\}$$
$$= \frac{1}{2(1 - e^2)} \log \left\{ \frac{1 + \sin l}{1 - \sin l} \cdot \left(\frac{1 - e\sin l}{1 + e\sin l}\right)^e \right\}$$
$$= \frac{1}{(1 - e^2)} \log \left\{ \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} l) \cdot \left(\frac{1 - e\sin l}{1 + e\sin l}\right)^{\frac{1}{2}e} \right\}.$$

Наконецъ умноживъ это выраженіе на $i(1 - e^2)$ получимъ урав. (12).

$$X = kt,\ Y = k\log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) + \tfrac{1}{2}ke\log\left(\frac{1 - e\sin l}{1 + e\sin l}\right).$$

Здѣсь знакъ log означаетъ неперовъ логариѳмъ; для вычисленія же по бриговымъ логариѳмамъ, достаточно оба послѣдніе члена раздѣлить на модуль M, $\log M = \overline{1}.6377843$. Самое вычисленіе сдѣлается проще, если положимъ $\sin\psi = e\sin l$, ибо тогда $\frac{1 - e\sin l}{1 + e\sin l}$ обратится въ $\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \operatorname{tang}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) = \cot^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}\psi)$, а самое уравненіе въ

$$X = kt,\ Y = \frac{k}{M}\log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) + \frac{ke}{M}\log\cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}\psi).$$

Проекція, построенная посредствомъ сихъ уравненій, не иное что будетъ какъ Меркаторская, при вычисленіи возрастающихъ широтъ которой, принято во вниманіе сжатость земли ибо если здѣсь положимъ $e = 0$, то урав. будетъ одинаково съ предложенныхъ на стр. 183.

§ 512. Примемъ теперь для f въ урав. (14), вмѣсто линейной, мнимую и показательную функцію, $fv = kc^{\pm iav}$, разумѣя подъ c основаніе неперовыхъ логариѳмовъ, а подъ k и α произвольныя постоянныя количества. Такъ какъ v означаетъ здѣсь весь многочленъ, предъ коимъ стоитъ f въ урав. (14), и какъ онъ имѣетъ видъ $t \pm i\log n$, то fv или $X \pm iY$ обратится въ

$$X \pm iY = kc^{\pm i\alpha(t \pm i\log n)} = kc^{\pm i\alpha t - \alpha\log n} = \frac{kc^{\pm i\alpha t}}{c^{\alpha\log n}}.$$

Но какъ изъ Высшей Алгебры извѣстно (см. Курсъ Чистой Матем. Франкера 4-го изданія, ч. II, чл. 630), что $c^{\pm i\alpha t} = \cos(\alpha t) \pm i\sin(\alpha t)$, и какъ $c^{\alpha\log n} = n^\alpha$, то подставя вмѣсто n его величину, по преобразованіи и сокращеніи получимъ

$$X = k\operatorname{tang}^\alpha(45^\circ - \tfrac{1}{2}l)\left(\frac{1 + e\sin l}{1 - e\sin l}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}\cos(\alpha t),$$

$$Y = k\operatorname{tang}^\alpha(45^\circ - \tfrac{1}{2}l)\left(\frac{1 + e\sin l}{1 - e\sin l}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e}\sin(\alpha t).$$

Оба эти уравненія примутъ видъ удобнѣйшій для вычисленія логариѳмами, если положимъ $e\sin l = \sin\psi$, ибо тогда

$$\left(\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi}\right)^{\frac{1}{2}} = \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) = \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\psi),$$

и сверхъ того, если $\operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}l)$ замѣнимъ ему равною величиною $\frac{1}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}l)}$, то выведенныя нами уравненія обратятся въ

$$\left.\begin{aligned} &X = \varrho\cos(\alpha t),\quad Y = \varrho\sin(\alpha t), \\ \text{положивъ}\quad &\varrho = k\left[\frac{\operatorname{tang}^e(45^\circ + \frac{1}{2}\psi)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}l)}\right]^\alpha = \frac{k}{u^\alpha}, \\ \text{гдѣ}\quad &u = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}l)}{\operatorname{tang}^e(45^\circ + \frac{1}{2}\psi)},\quad \sin\psi = e\sin l \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(15)$$

Не должно забывать, что k и α суть произвольныя постоянныя. Онѣ зависятъ отъ частныхъ условій, требуемыхъ отъ карты, какъ это увидимъ ниже.

§ 513. Изслѣдуемъ свойства этихъ уравненій:

1-е) Если примемъ въ нихъ долготу t за постоянную, а широту l за перемѣнную, (что соотвѣтствуетъ точкамъ лежащимъ на одномъ и томъ же меридіанѣ), то по раздѣленіи Y на X, получимъ $Y = X\operatorname{tang}(\alpha t)$, выражающее уравненіе прямой линіи, проходящей чрезъ начало осей координатъ, и составляющей съ меридіаномъ, принимаемымъ за ось x-въ, уголъ αt, который условимся впредь означать чрезъ θ, $\theta = \alpha t$.

2-е) Если же примемъ въ уравненіяхъ (15) широту l за постоянную, а долготу t за перемѣнную, (что соотвѣтствуетъ точкамъ, лежащимъ на одной и той же земной параллелѣ), то X и Y выразятъ координаты точекъ круга, описаннаго радіусомъ $= \varrho$ и имѣющаго свой центръ въ началѣ осей, ибо сумма квадратовъ этихъ уравненій будетъ $X^2 + Y^2 = \varrho^2[\cos^2(\alpha t) + \sin^2(\alpha t)] = \varrho^2$.

Отсюда заключаемъ, что *всѣ круги параллелей изобразятся на проэкціи одноцентральными кругами, а меридіаны въ видѣ прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ центръ этихъ круговъ, и слѣд. пересѣкающихъ параллели подъ прямыми углами.* Изъ чего слѣдуетъ, что какія бы постоянныя количества

k и α ни были, *географическая сътка, построенная посредствомъ вышепредложенныхъ формулъ,* можетъ быть разсматриваема какъ *развернутая поверхность прямаго конуса,* на которомъ меридіаны представлены въ видѣ образующихъ его линій, а параллели кругами параллельными съ его основаніемъ и находящимися одинъ отъ другаго въ такомъ разстояніи, чтобы въ каждомъ четыреугольникѣ образуемымъ тѣми и другими, содержаніе между дугою меридіана и дугою параллели было одинаково какъ и на поверхности земли (*).

И такъ, предположимъ, что на кругѣ земной параллели aa' (чер. 243), коей радіусъ $ac=r$, построенъ какой бы то ни было прямой конусъ aoa', (т. е. касательный къ сферѣ или пересѣкающій ее какъ на прим. ao' чер. 244) и что на этомъ кругѣ отложены равныя между собою дуги af, ff', $f'f''$ ..... Прямыя, соединяющія вершину o конуса съ точками f, f', f'' ... изобразятъ на поверхности конуса меридіаны. Для означенія же на этой поверхности круговъ параллелей, отложимъ по линіи ao въ обѣ стороны отъ точки a, части ab, bd,... ab', $b'd'$.... такой длины, чтобы круги проходящіе чрезъ точки b, d,... b', d'.... и параллельные къ основанію конуса образовали четыреугольники, изъ коихъ бы въ каждомъ бока были пропорціональны съ боками сферическаго четыреугольника, находящагося на поверхности земли. Линіи ao, bo, do и проч. очевидно изобразятъ радіусы ϱ, которыми параллели описываются на картѣ и длина коихъ опредѣляется формулами (15). На развернутой поверхности такимъ образомъ построеннаго конуса длина дугъ AF, FF'.... лежащихъ на параллелѣ описанной радіусомъ AO$=ao$ будетъ таже самая какъ и на поверхности земли, а всѣ прочія дуги параллелей и меридіановъ будутъ имѣть длину иную, нежели какъ на сей послѣдней.

§ 514. Займемся теперь опредѣленіемъ содержанія какой либо весьма малой дуги ds лежащей на поверхности земли,

---

(*) Не должно выпускать изъ виду главнѣйшаго условія, служившаго основаніемъ всей теоріи Гаусса, что длина линій незначительной длины на данной поверхности должны быть пропорціональны съ ихъ проэкціями.

къ длинѣ dS ей соотвѣтствующей линіи на поверхности развернутаго конуса, о коемъ говорено было выше. Предположимъ, что разсматриваемая дуга ds взята по направленію меридіана, и что широта южной ея оконечности есть l. Длина такого элемента ds, какъ извѣстно (см. § 174), выражается формулою

$$ds = \frac{A(1-e^2)\,dl}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}},$$

гдѣ dl есть весьма малая дуга, выраженная въ частяхъ радіуса принятаго за 1-цу.

На развернутой же поверхности конуса, длину соотвѣтствующей линіи dS можно принимать $= -d\varrho$, т. е. элементу радіуса ϱ, коимъ описывается параллель подъ широтою l. Здѣсь ставимъ предъ $d\varrho$ знакъ —, потому что съ возрастаніемъ широты l радіусъ ϱ уменьшается. Для опредѣленія $dS = -d\varrho$ возьмемъ непировъ логариѳмъ выраженія ϱ въ урав. (15), и потомъ одифференцируемъ въ отношеніи къ l. Найдемъ

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\alpha e.d\psi}{\cos\psi} - \frac{\alpha.dl}{\cos l},$$

но изъ урав. $\sin\psi = e\sin l$, имѣемъ $d\psi = \frac{e\cos l.dl}{\cos\psi}$, и какъ $\cos^2\psi = 1 - \sin\psi^2 = 1 - e^2\sin^2 l$; слѣд. по внесеніи и сокращеніи получимъ

$$d\varrho = -\frac{\alpha\varrho(1-e^2).dl}{(1-e^2\sin^2 l)\cos l}.$$

Послѣ чего искомое содержаніе $\frac{dS}{ds}$ или $-\frac{d\varrho}{ds}$, которое условимся означать чрезъ m, будетъ

$$\frac{dS}{ds} = m = \frac{\alpha\varrho\sqrt{1-e^2\sin^2 l}}{A\cos l} \dots\dots\dots (16)$$

и какъ $\frac{A}{\sqrt{1-e^2\sin^2 l}}$ выражаетъ нормаль N подъ широтою l, а $N\cos l =$ радіусу r круга параллели на земномъ сфероидѣ подъ тою же широтою, то

$$m=\frac{\alpha\varrho}{r}\ \text{или}=\frac{\alpha k}{ru^{\alpha}}\,(*)\ldots\ldots\ldots\ldots(17).$$

Таково уравненіе выражающее отношеніе длины весьма малой линіи на развернутой поверхности вышесказаннаго конуса къ длинѣ соотвѣтствующей линіи на поверхности земли, предполагая, что эта поверхность конуса представлена безъ всякаго уменьшенія дѣйствительной своей величины.

Такъ какъ урав. (16) показываетъ, что m измѣняется съ широтою, то рождается вопросъ при какой широтѣ l количество m будетъ имѣть величину наименьшую (minimum)? Для сего выведемъ изъ урав. (16) выраженіе $\frac{dm}{dl}$ и приравнявъ результатъ нулю, найдемъ изъ него l. Для удобнѣйшаго дифференцированія возьмемъ сперва неперовъ логариѳмъ урав. (16) и получимъ

$$\frac{dm}{m}=\frac{d\varrho}{\varrho}-\frac{e^2\sin l\cos l.dl}{1-e^2\sin^2 l}+\frac{\sin l}{\cos l}.dl;$$

подставя сюда вмѣсто $\frac{d\varrho}{\varrho}$ вышенайденную нами величину, приведя къ одному знаменателю и сокративъ, найдемъ

$$\frac{dm}{dl}=\frac{m(1-e^2)(\sin l-\alpha)}{(1-e^2\sin^2 l)\cos l}=0$$

(*) На основаніи общей теоріи Гаусса, это выраженіе найдется по формулѣ (10). И дѣйствительно, одифференцируемъ $fv=kc^{iav}$ и будетъ $\frac{d(fv)}{dv}=\varphi v=ikac^{iav}$; но какъ уже мы видѣли, что v въ урав. (14) имѣетъ видъ $t+i\log n$, то $\varphi v=ikac^{iat}.c^{-\alpha\log n}=\frac{ikac^{iat}}{n^{\alpha}}$; такимъ же образомъ $\varphi' v=-\frac{ikac^{-iat}}{n^{\alpha}}$. Послѣ чего, $\varphi v.\varphi' v=\frac{k^2\alpha^2}{n^{2\alpha}}$, а урав, (10) (не забывая что $H=1$, а h выражено уравненіемъ (13)), обратится въ

$$m=\frac{\alpha k\sqrt{1-e^2\sin^2 l}}{A\cos l.\operatorname{tg}^{\alpha}(45^{\circ}+\frac{1}{2}l)}\left(\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l}\right)^{\frac{1}{2}e\alpha}.$$

Подставя сюда величины выражаемыя уравненіями (15), очевидно получимъ урав. (17).

Это выраженіе очевидно не иначе можетъ быть равно нулю, какъ при условіи, что $\sin l - \alpha = 0$ или $\sin l = \alpha$. Отсюда заключаемъ, что *искомая широта, соотвѣтствующая* minimum *величины* m, *есть та, которой синусъ равняется постоянному количеству* α входящему въ урав. (15), (16) и (17). Условимся впредь эту широту означать буквою λ, $\sin\lambda = \alpha$ (*). И такъ, когда эта широта λ дана, то найдется α и обратно; для опредѣленія же другаго постояннаго количества k, входящаго въ формулы (15), необходимо предварительно знать широту l той параллели *ac* (чер. 243), которая на развернутой поверхности конуса сохраняетъ свою дѣйствительную длину, ибо подъ сею широтою величина m обращается въ 1-цу, и тогда изъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\alpha\varrho}{r} \text{ или } = \frac{\alpha k}{r u^{\alpha}} \\ \text{получимъ}\quad k &= \frac{r u^{\alpha}}{\alpha} \text{ или } = \frac{N \cos l . u^{\alpha}}{\alpha} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

гдѣ N и u соотвѣтствуетъ широтѣ l.

§ 515. Когда координаты, вычисленныя по формуламъ (15), всѣхъ точекъ пересѣченія меридіановъ съ параллелями будутъ отложены на листы бумаги въ принятомъ масштабѣ, тогда начерченная проэкція изобразитъ въ уменьшенномъ видѣ развернутую поверхность конуса, о коемъ говорено было выше. Изобразимъ масштабъ, выражающій это уменьшеніе, чрезъ $\frac{1}{\mu}$ и условимся называть его *главнымъ масштабомъ.* Если

(*) Къ сему присовокупимъ слѣдующее замѣчаніе: такъ какъ подъ широтою параллели *ac* (чер. 243), на которой построенъ конусъ, величина m обращается въ 1-цу, то изъ урав. $1 = \frac{\alpha\varrho}{r}$, получимъ $\alpha = \frac{r}{\varrho}$, гдѣ r очевидно означитъ радіусъ *ac* параллели, а ϱ длину бока *ao* конуса. Но изъ треуг-ка *aoc* имѣемъ $\frac{ac}{ao}$ или $\frac{r}{\varrho} = \sin aoc$; слѣд. $\alpha = \sin aoc$, т. е. что постоянное количество α *выражаетъ синусъ угла образуемаго бокомъ конуса и его осью.* И такъ, этотъ уголъ равняется широтѣ λ.

для сего масштаба примемъ n саженей въ дюймѣ, то будетъ $\mu = n.84$ (см. стр. 118). Измѣреніе линій по картѣ посредствомъ этого масштаба приведетъ къ опредѣленію длины соотвѣтствующихъ линій находящихся на поверхности конуса, а не на поверхности земли. Во избѣжаніе такого неудобства необходимо знать масштабъ, соотвѣтствующій каждой изъ начерченныхъ параллелей. Для опредѣленія подобнаго рода масштабовъ, которыхъ впредь будемъ называть *частными масштабами,* замѣтимъ предварительно, что если возьмемъ на поверхности земли какую либо весьма малую линію, и означимъ ее длину выраженную въ саженяхъ чрезъ s, а длину ей соотвѣтствующей на поверхности конуса чрезъ S, то въ слѣдствіе вышеизложеннаго будетъ $\frac{S}{s} = m$, откуда $S = ms$, гдѣ m есть величина опредѣляемая формулою (17) и измѣняющаяся съ широтою l. Но какъ начерченная проэкція представляетъ поверхность конуса уменьшенною въ μ разъ, то линія s на картѣ будетъ имѣть длину $\frac{S}{\mu} = \frac{ms}{n.84}$ въ доляхъ сажени или $= \frac{m.s}{n}$ въ доляхъ дюйма. Если предположимъ теперь, что s заключаетъ въ себѣ n саженей, $s = n$, то вышенайденное выраженіе ея длины на картѣ обратится въ m. Отсюда видимъ, что *отвлеченное число* m, *опредѣляемое формулою* (17) *и соотвѣтствующее широтѣ* l *будучи отложено по дюймовому масштабу, выразитъ подъ этою широтою, тоже самое число саженъ, какое принималось въ дюймѣ для главнаго масштаба.* Слѣд. для построенія частнаго масштаба въ видѣ линіи, достаточно будетъ такую линію m раздѣлить на приличное число частей; для выраженія же этого масштаба отвлеченно, (или собственно говоря содержанія $\frac{1}{\mu'}$ между длиною линіи на картѣ и ею соотвѣтствующею въ природѣ), умножить число m на главный масштабъ и будетъ $\frac{1}{\mu'} = m \times \frac{1}{\mu}$, ибо $\mu = n \times 84$ представляетъ въ дюймахъ длину той линіи на поверхности земли, которая на картѣ изображается линіею въ

m дюймовъ. Урав. $\frac{1}{\mu'} = m \times \frac{1}{\mu}$ далѣе показываетъ, что частный масштабъ $\frac{1}{\mu'}$ уменьшается пропорціонально количеству m, и что при $m=1$ онъ обращается въ главный.

Но какъ выше видѣли, что для опредѣленія постояннаго количества α, надобно знать широту λ той параллели, на которой m имѣетъ minimum, а для опредѣленія другаго постояннаго k, широту l той, на которой $m=1$, то заключаемъ, что для построенія карты какой либо страны, должно предварительно условиться, на *какой именно параллели желаютъ, чтобы частный масштабъ былъ наименьшій* и *на какой сохраняется главный.* Выборъ обоихъ этихъ условій очевидно произволенъ. Объснимъ это примѣрами.

I. Если желаютъ, чтобы *главный масштабъ былъ наименьшій изъ всѣхъ частныхъ масштабовъ* и *находился на параллели, проходящей чрезъ средину изображаемой страны,* то достаточно будетъ ея широту λ ввести въ формулу (18) вмѣсто l, и получимъ

$$\alpha = \sin\lambda,\quad k = \frac{r u^{\alpha}}{\alpha} = \frac{\mathrm{N}\cos\lambda}{\sin\lambda} . u^{\alpha} = \mathrm{N}\cot\lambda . u^{\alpha}$$

гдѣ
$$u = \frac{\operatorname{tang}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\lambda)}{\operatorname{tang}^{e}(45^{\circ} + \frac{1}{2}\psi)},\quad \sin\psi = e\sin\lambda.$$

Въ отношеніи карты Россіи, крайними предѣлами коей служатъ параллели подъ широтою 40° и 70°, широта средней параллели будетъ $\lambda = 55^{\circ}$. Численное вычисленіе даетъ $\log\alpha$ или $\log\sin\lambda = 9.9133645$, $\log\mathrm{N} = 6.4765132$ (въ саж.), $\log\log u = 9.6980132$ и наконецъ $\log k = 6.7304146$. Введя эти величины α и k въ уравненія (15) и принявъ $l = 40^{\circ}$, получимъ $\log\log u = 9.5178061$, $\log\varrho = 6.4605346$, $\log r = 6.3603921$ и $m = 1{,}03159$; принимая же $l = 70^{\circ}$, найдемъ $m = 1{,}04327$. И такъ, если возьмемъ на поверхности земли линію s во 100 верстъ подъ широтою 40°, то длина ея на картѣ измѣряя главнымъ масштабомъ будетъ $\mathrm{S} = ms = 51579$ саж.; если же такая линія возмется подъ широтою 70°, то получимъ $\mathrm{S} = 52164$. Слѣд. въ 1-мъ случаѣ, линія во 100 вер. будетъ увеличена на картѣ на 1579 саж, а во 2-мъ на 2164 саж.

II. Если требуется, чтобы *частные масштабы на крайнихъ параллеляхъ,* широту коихъ означимъ чрезъ l' и l'', *были равны между собою, а наименьшій изъ нихъ служилъ* какъ и прежде, *главнымъ масштабомъ,* то широта λ найдется вычисленіемъ слѣдующимъ образомъ: пусть m', r' и u' будутъ величины соотвѣтствующія широтѣ l', а m'', r'' и u'' широтѣ l'': такъ какъ по условію $m'=m''$, и какъ

$$m'=\frac{\alpha k}{r'u'^{\alpha}} \text{ и } m''=\frac{\alpha k}{r''u''^{\alpha}},$$

то будетъ $$r'u'^{\alpha}=r''u''^{\alpha}, \text{ или } \frac{r'}{r''}=\left(\frac{u''}{u'}\right)^{\alpha}$$

откуда $$\alpha=\frac{\log r'-\log r''}{\log u''-\log u'}=\sin\lambda\ldots\ldots(19).$$

Послѣ чего другое постоянное количество k получится какъ и прежде изъ урав. $k=\frac{ru^{\alpha}}{\alpha}=\mathrm{N}\cot\lambda.u^{\alpha}$.

Численное вычисленіе для $l'=40^\circ$ и $l''=70^\circ$

даетъ

	$\log r'=6.3603921$,	$\log u'=0{,}3294626$
	$\log r''=6.0108738$,	$\log u''=0{,}7509520$
	числит. $=0{,}3495183$	$\log=\bar{1}.5434699$
	знамен. $=0{,}4214894$	$\log=\bar{1}.6247867$
	$\log\alpha$ или $\log\sin\lambda$	$=\bar{9}.9186832$
		$\lambda=56^\circ\,1'\,17''$

Послѣ чего для широты λ найдемъ $\log\mathrm{N}=6.4765374$, $\log\log u=9.7097396$, $\log k=6.7302082$. Если введемъ сіи величины α и k въ формулу (17), то для $l'=40^\circ$ и $l''=70^\circ$, получимъ $m=1{,}03584$

III. Если желаютъ, чтобы частные масштабы на крайнихъ параллеляхъ были равны между собою, а *главный масштабъ находился на какой либо параллели подъ данною широтою* l, тогда α опредѣлится одинаково какъ въ предшедшемъ случаѣ, т. е. по урав. (19), а другое количество k изъ уравненія (18). Въ семъ случаѣ, кромѣ параллели подъ широтою l, будетъ еще находиться другая, которой масштабъ равняется главному. Такъ на прим. если крайнія параллели имѣютъ широту $l'=40^\circ$, $l''=70^\circ$, а $l=50^\circ$, то вычисленіе показываетъ, что эта параллель будетъ находиться почти подъ 62°.

IV. Наконецъ, если желаютъ, чтобы *главный масштабъ сохранялся на двухъ данныхъ параллеляхъ,* тогда должно α опредѣлять одинаково какъ въ двухъ послѣднихъ случаяхъ, т. е. по урав. (19), вводя въ него r', u' и r'', u'' соотвѣтственно даннымъ широтамъ l' и l'', а количество k изъ уравненія $1=\frac{\alpha k}{r'u'^{\alpha}}$ или $1=\frac{\alpha k}{r''u''^{\alpha}}$, (ибо на каждой изъ двухъ вышесказанныхъ параллеляхъ m обращается въ 1), и будетъ

$$k=\frac{r'u'^{\alpha}}{\alpha} \text{ или} =\frac{r''u''^{\alpha}}{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (20).$$

Такъ на прим. если примемъ $l'=50°$ и $l''=60°$, то чрезъ вычисленіе, подобное вышепредложенному получимъ $\log\alpha$ или $\log\sin\lambda=9.9139237$, откуда $\lambda=55°6'20''$; послѣ чего урав. (20) даетъ $\log k=6.7287281$. Вводя сіи постоянныя въ урав. (17) получимъ: для $l'=40° \ldots\ldots m=1{,}02809$

» $l=55° \ldots\ldots m=0{,}99620$

» $l''=70° \ldots\ldots m=1{,}03715$ (*)

Предлагаемъ здѣсь весь ходъ вычисленія $\log\log u$, $\log\varrho$ и координатъ X и Y для точки, имѣющей $l=58°30'$ и $t=9°15'$ или $=33300''$. Изъ урав. $\sin\psi=e\sin l$ имѣемъ $\psi=3°59'39'',64$.

$$\begin{aligned}
\log\tan(45°+\tfrac{1}{2}\psi)&=0.0303012\\
\log\log\tan(45°+\tfrac{1}{2}\psi)&=\bar{2}.4814599\\
\log e&=\bar{2}.9122052\\
\log(e\log\operatorname{tg}(45°+\tfrac{1}{2}\psi))&=\bar{3}.3936651\\
\log\tan^{e}(45°+\tfrac{1}{2}\psi)&=0{,}0024755\\
\log\tan(45°+\tfrac{1}{2}l)&=0{,}5497060\\
\log u&=0{,}5472305\\
\log\log u&=\bar{1}.7381703\\
\log\alpha&=\bar{1}.9139237\\
\log(\alpha\log u)&=\bar{1}.6520940
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\alpha&=\bar{1}.9139237\\
\log t&=4.5224442\\
\log\theta&=4.4363679 \qquad \theta=7°35'13''\\
\log k&=6.7287281\\
\alpha\log u&=0.4488425\\
\log\varrho&=6.2798856\\
\log\cos\theta&=9.9961813\\
\log X&=6.2760669, \qquad X=1888282\\
\log\varrho&=6.2798856\\
\log\sin\theta&=9.1206743\\
\log Y&=5.4005599, \qquad Y=251513
\end{aligned}$$

(*) Выведенныя нами теперь величины постоянныхъ α и k будучи введены въ формулы (15), доставятъ проэкцію весьма удобную для составленія карты всей Россіи, потому что во 1-хъ) главный масштабъ на ней сохранится на параллеляхъ подъ 50° и 60° широты, и во 2-хъ) вся полоса между сими двумя параллелями, какъ наиболѣе

§ 516. Еслибы при построеніи разсматриваемой нами проэкціи, пожелали за начало осей координатъ принять не центръ параллелей, но точку пересѣченія средняго меридіана съ среднею параллелью (что будетъ удобнѣе въ практикѣ), то достаточно было бы по вычисленіи координатъ посредствомъ формулъ (15), вычитать каждую абсциссу X изъ радіуса ϱ средней параллели, и принимая $x=\varrho-X$ и прежній Y за новыя координаты наносить ихъ и потомъ чертить меридіаны и параллели руководствуясь изложеннымъ въ § 489. Когда географическая сѣтка такимъ образомъ будетъ начерчена, тогда останется нанести на нее тѣ точки, коихъ широта и долгота извѣстны, слѣдующимъ образомъ:

Предположимъ, что меридіаны и параллели проведены на проэкціи отъ 1° до 1°. Если ABDC (чер. 243) есть тотъ четыреугольникъ, внутри коего должна помѣститься требуемая точка M, коей широта $=l$, а долгота $=t$, то означивъ широту параллелей AC и BD чрезъ l' и $l''=l'+1°$, а радіусы коими онѣ описаны на картѣ чрезъ ϱ' и ϱ'', разность $\varrho'-\varrho''$ очевидно выразитъ длину дуги AB меридіана на картѣ. Хотя масштабъ на проэкціи по направленію дугъ меридіановъ измѣняется съ широтою, однакоже какъ это измѣненіе весьма нечувствительно, то безъ значительной погрѣшности, можно принимать на протяженіи дуги AB масштабъ постояннымъ (*), и потому составится пропорція:

$$3600'' : \varrho'-\varrho'' = l-l' : AE$$

откуда $$AE \text{ или } CF = \frac{l-l'}{3600''}(\varrho'-\varrho'')$$

населенная, на картѣ будетъ весьма мало измѣнена: хотя она и представится на ней нѣсколько сжатою, однако весьма нечувствительно, ибо наименьшій линейный масштабъ, т. е. подъ широтою 55°, будетъ различествовать отъ главнаго только на 0,0038, и въ 3-хъ) Южный предѣлъ государства на картѣ будетъ растянутъ менѣе нежели сѣверный край, въ точности изображенія коего не встрѣчается особенной надобности, по причинѣ его необитаемости.

(*) Въ строгомъ смыслѣ, масштабъ на картѣ Россіи, какъ показываетъ вычисленіе, остается постояннымъ не на протяженіи одного градуса меридіана, но на протяженіи полуградуса.

Опредѣливъ такимъ образомъ длину равныхъ линій AE и CF, и отложивъ ихъ по главному масштабу карты, проведутъ линію EF параллельно къ AC. Послѣ того измѣривъ циркулемъ длину EF въ доляхъ дюйма, получатъ длину линіи EM изъ пропорціи

$$3600'' : EF = t - t' : EM,$$

гдѣ t' означаетъ долготу меридіана AB.

Еслибы на проэкціи меридіаны и параллели проведены были не отъ 1° до 1°, но отъ 2° до 2° или отъ 5° до 5°, тогда невозможно было бы принимать длину дугъ меридіана пропорціональными съ ихъ амплитудами, а потому и вышепредложенная пропорція не имѣла бы точности; но какъ въ подобнаго рода случаяхъ карты составляются всегда въ весьма маломъ масштабѣ, то ошибочность величины опредѣляемаго члена предыдущей пропорціи будетъ не ощутительна въ масштабѣ, а слѣд. и вышепредложенное правило опредѣлять положеніе точекъ, можно во всѣхъ случаяхъ принимать математически точнымъ.

§ 517. Изложивъ способы вычисленія и построенія проэкціи, основанной на общей теоріи Гаусса, можемъ сдѣлать вопросъ: должно ли сію проэкцію во всѣхъ случаяхъ предпочтительно употреблять предъ проэкціею Бонна? Сравненіе выгодъ и недостатковъ представляемыхъ сими двумя проэкціями, приводитъ насъ къ слѣдующему заключенію:

1-е) Когда изображаемая страна невелика, или когда простирается на значительное протяженіе отъ запада къ востоку находясь между двумя параллелями, лежащими близко одна отъ другой, тогда обѣ вышесказанныя проэкціи одинаково доводятъ до цѣли, ибо какъ на проэкціи Бонна, такъ и на проэкціи теперь нами изложенной, точность изображенія узкаго сферическаго пояса не нарушается.

2-е) Когда страна лежитъ между двумя меридіанами, отстоящими близко одинъ отъ другаго, простираясь на значительное протяженіе отъ юга къ сѣверу, тогда карту выгоднѣе составлять по проэкціи Бонна, ибо на ней точность изображенія сохраняется со всею строгостію вдоль главнаго меридіана, между тѣмъ какъ на новой проэкціи, въ слѣдствіе из-

ложеннаго на стр. 208 дуги меридіановъ, лежащія по срединѣ карты, короче, а лежащія близь сѣвернаго и южнаго краевъ карты длиннѣе соотвѣтствующихъ имъ на землѣ.

Наконецъ 3-е) Когда страна, подобно Россіи, простирается на значительное протяженіе какъ въ широту такъ и въ долготу, тогда проэкцію Гаусса предпочтительно должно употреблять предъ проэкціею Бонна, ибо въ сей послѣдней очертанія странъ, по мѣрѣ отдаленія отъ средняго меридіана и средней параллели, искажаются; въ проэкціи же Гаусса, хотя масштабъ карты и измѣняется вмѣстѣ съ широтою, однако подобіе очертаній во всѣхъ частяхъ карты сохраняется; къ тому же, если для каждой изъ параллелей означенъ соотвѣтствующій масштабъ, то можно имъ безошибочно измѣрять длину всѣхъ линій, въ каждомъ изъ четыреугольниковъ, образуемыхъ двумя меридіанами и двумя параллелями, чего по проэкціи Бонна исполнить не возможно отъ того, что въ тѣхъ частяхъ карты, которыя находятся близь ея угловъ длина линій измѣняется не равномѣрно и самое это измѣненіе зависитъ отъ ихъ азимута (см. стр. 174).

Въ заключеніе должно присовокупить, что хотя вычисленіе координатъ по формуламъ (15) съ перваго взгляда кажется весьма многосложнымъ, однако въ сущности оно не сложнѣе вычисленія координатъ по проэкціи Бонна, а особенно когда составлена единожды навсегда таблица, (*), представляющая величину $\log\log u$ для каждой широты l, ибо если сія величина будетъ извѣстна, тогда вычисленіе выраженія $\varrho=\frac{k}{u^\alpha}$ по даннымъ k и α будетъ уже весьма не затруднительно. Сверхъ того должно замѣтить, что такъ какъ меридіаны представляются въ видѣ радіусовъ круговъ параллелей, то величина угловъ $\theta=\alpha t$, составляемыхъ ими съ осью x-въ не зависитъ отъ широты параллели, и потому найдя уг. $\theta=\alpha t$ на прим. для $t=1^\circ$ или $3600''$, величина угловъ для $t=2^\circ$, 3°, 4°.... получится чрезъ простое умноженіе;

(*) Въ концѣ сего *Прибавленія къ Высш. Геод.* приложена таблица величинъ $\log\log u$ для каждаго полуградуса между 40°и 70° широты.

между тѣмъ какъ въ проэкціи Бонна необходимо для каждой параллели вычислять уг. θ по уравненію предложенному на стр. 162, что значительно увеличиваетъ сложность дѣйствія.

§ 580. Займемся теперь изображеніемъ поверхности сфероида разсматриваемаго за эллипсоидъ вращенія, на поверхности шара, коего радіусъ есть R. Условимся впредь широту и долготу точки на эллипсоидѣ означать чрезъ L и T, а широту и долготу, соотвѣтствующей ей точки на шарѣ чрезъ l и t.

На основаніи общей теоріи Гаусса для изображенія данной поверхности на другой, такъ, чтобы сохранялось подобіе въ самыхъ малѣйшихъ частяхъ, надобно въ выраженіи $\omega = dx^2 + dy^2 + dz^2$, подставить вмѣсто dx, dy и dz величины, приличествующія каждой изъ поверхностей и потомъ объ интегрировать. На стр. 194, доказано было, что этотъ интегралъ имѣетъ видъ $\lambda \pm i\mu$, и что если для изображаемой поверхности означимъ его чрезъ $P \pm iQ$, а для той, на которой желаютъ составить изображеніе чрезъ $p \pm iq$, то будетъ $p \pm iq = f(P \pm iQ)$. Но въ § 511 выведено было нами для поверхности эллипсоида, что упомянутый интегралъ есть слѣдующій (см. ур. 12)

$$P \pm iQ = T \pm i \log \left[\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}L) \left(\frac{1 - e\sin L}{1 + e\sin L} \right)^{\frac{1}{2}e} \right];$$

для вывода же интеграла соотвѣтствующаго поверхности шара, достаточно въ этомъ уравненіи положить $e = 0$ (*) и получимъ

(*) Вообще, когда во всѣхъ уравненіяхъ §§ 511 и 512, положимъ $e = 0$ и $A = B = R$, тогда они будутъ соотвѣтствовать изображенію на плоскости поверхности шара, коего радіусъ есть R. Уравненія (13) и (15) обратятся въ

$$h = R^2 \cos^2 l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$x = k \tang^{\alpha}(45^\circ - \tfrac{1}{2}l)\cos(\alpha t),$$
$$y = k \tang^{\alpha}(45^\circ - \tfrac{1}{2}l)\sin(\alpha t).$$

При семъ должно замѣтить, что если въ сихъ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ примемъ $\alpha = 1$, то получимъ $x = k\tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}l)\cos t$, $y = k\tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}l)\sin t$, которыя выражаютъ координаты стереографической полярной проэкціи (см. стр. 143, урав. 18).

$$p \pm iq = t \pm i \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} l).$$

Въ слѣдствіе чего имѣемъ

$$t \pm i \log \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2} l) = f \left\{ T \pm i \log \left[\operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2} L) \left(\frac{1 - e \sin L}{1 + e \sin L} \right)^{\frac{1}{2} e} \right] \right\} \,.\,.\, (21)$$

Простѣйшее рѣшеніе вопроса получится, если положимъ $fv = v$, что даетъ

$$t = T, \;\; \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} l) = \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} L) \left(\frac{1 - e \sin L}{1 + e \sin L} \right)^{\frac{1}{2} e}.$$

Посредствомъ сихъ уравненій можно какую бы то ни было систему точекъ, находящихся на эллипсоидѣ вращенія, перенести на поверхность шара. Если данныя точки на эллипсоидѣ весьма отдалены однѣ отъ другихъ, то кратчайшія между ними разстоянія будутъ линіи геодезическія, т. е. двойной кривизны. Перенеся на шаръ какъ данныя точки, такъ и всѣ промежуточныя, лежащія на геодезическихъ линіяхъ, такъ, чтобы для каждой изъ нихъ t равнялось T, а l и L удовлетворялись вышепредложеннымъ уравненіямъ, произойдетъ на шарѣ система треугольниковъ, коихъ углы будутъ равны угламъ между геодезическими линіями, а бока не будутъ дуги большихъ круговъ, но линіи также двойной кривизны. Эти кривыя тѣмъ менѣе будутъ отдаляться отъ дугъ большихъ круговъ соединяющихъ крайнія точки, чѣмъ разстоянія между ними менѣе, и даже можно разсматривать ихъ сливающимися съ ними, коль скоро разстоянія между точками на эллипсоидѣ незначительны. Примѣняя это къ геодезическимъ дѣйствіямъ, можно проложенія на шарѣ боковъ сѣти, безъ чувствительной погрѣшности принимать за дуги большихъ круговъ. Въ слѣдствіе чего, еслибы вообразили себѣ, что всѣ точки тригон. сѣти по вышесказанному проложены на поверхность шара произвольнаго радіуса, то по даннымъ бокамъ и угламъ треугольниковъ на сей послѣдней, можно было бы вычислить на ней широту l и долготу t всѣхъ точекъ по правиламъ сферической тригонометріи, а потомъ съ помощію выше выведенныхъ формулъ, найдти соотвѣтствующія величины L и T на земномъ сфероидѣ.

Принятая нами выше произвольная функція $fv = v$ наиболѣе приличествуетъ тому случаю, когда желаютъ изобразить на поверхности шара цѣлую поверхность эллипсоида. Для приложенія же этой теоріи къ дѣйствіямъ геодезическимъ, которыми обнимается всегда незначительная часть земной поверхности, будетъ выгоднѣе въ произвольную функцію ввести постоянное количество, положивъ $fv = v - i\log k$, и потомъ опредѣлить длину радіуса R шара и величину постояннаго k, такимъ образомъ, чтобы для параллели, проходящей чрезъ средину пространства занимаемаго сѣтью, m равнялось 1, т. е. чтобы линіи на эллипсоидѣ при сей параллелѣ не измѣнили на шарѣ своей длины, а для параллелей, отстоящихъ отъ средней на нѣсколько градусовъ къ сѣверу и къ югу, m разнствовало отъ единицы на величину весьма малую. Это условіе еще болѣе будетъ достигнуто, если въ нашу произвольную функцію введется другое постоянное количество, именно:

$$fv = \alpha v + i\log k.$$

Подставя сюда вмѣсто v его величину, выражаемую урав. (21), получимъ

$$t = \alpha T,\ \operatorname{tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) = k\operatorname{tg}^{\alpha}(45^\circ + \tfrac{1}{2}L)\left(\frac{1 - e\sin L}{1 + e\sin L}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \ldots\ldots\ldots (22).$$

Для опредѣленія m, должно замѣтить, что для эллипсоида найдено уже было нами (см. урав. 13) $h = \dfrac{A^2\cos^2 L}{1 - e^2\sin^2 L}$, а для шара эта величина будетъ $H = R^2\cos^2 l$, и какъ $\varphi v = \dfrac{d.fv}{dv} = \alpha = \varphi' v$, то урав. (10) обратится въ

$$m = \frac{\alpha R\cos l\sqrt{1 - e^2\sin^2 L}}{A\cos L} \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Взявъ неперовъ логариѳмъ урав. (22) и потомъ одифференцировавъ, найдемъ

$$\frac{dl}{\cos l} = \frac{\alpha . dL}{\cos L} - \frac{\alpha e^2\cos L . dL}{1 - e^2\sin^2 L}$$

откуда
$$\frac{dl}{dL} = \frac{\alpha(1 - e^2)\cos l}{(1 - e^2\sin^2 L)\cos L} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Такимъ же образомъ дифференцированіе неперова логариѳма $\log m$ (урав. 23) даетъ

$$d.\log m = -\tang l.dl + \tang L.dL - \frac{e^2 \cos L \sin L.dL}{1-e^2\sin^2 L}$$

$$= -\tang l.dl + \frac{(1-e^2)\sin L.dL}{(1-e^2\sin^2 L).\cos L}.$$

Если мы отсюда исключимъ dl съ помощію урав. (24), то получимъ

$$\frac{d.\log m}{dL} = \frac{(1-e^2)(\sin L - \alpha\sin l)}{(1-e^2\sin^2 L)\cos L} \ldots\ldots (25).$$

Если же изъ того же уравненія исключимъ не dl, но dL, то будетъ

$$\frac{d.\log m}{dl} = \frac{\sin L}{\alpha\cos l} - \tang l = \frac{\sin L - \alpha\sin l}{\alpha\cos l}. \ldots\ldots (26)$$

Одифференцировавъ во 2-й разъ это послѣднее урав., получимъ

$$\frac{d^2\log m}{dl^2} = -\frac{1}{\cos^2 l} + \frac{\sin L\sin l}{\alpha\cos^2 l} + \frac{\cos dL.L}{\alpha\cos l.dl}$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 l} + \frac{\sin L\sin l}{\alpha\cos^2 l} + \frac{(1-e^2\sin^2 L)\cos^2 L}{\alpha^2(1-e^2)\cos^2 l} \ldots (27).$$

§ 519. Опредѣлимъ теперь постоянныя количества, входящія во всѣ предыдущія формулы. Пусть Λ будетъ широта средней параллели на эллипсоидѣ, а λ соотвѣтствующая ей широта на шарѣ: такъ какъ по условію при широтѣ Λ, количество m, должно равняться *единицѣ*, то подставя Λ и λ вмѣсто L и l въ уравненія (23), (26) и (27), и положивъ въ нихъ $m=1$, получимъ

$$R = \frac{A\cos\Lambda}{\alpha\cos\lambda\sqrt{1-e^2\sin^2\Lambda}}. \ldots\ldots (28)$$

$$\alpha\sin\lambda = \sin\Lambda. \ldots\ldots (29)$$

$$0 = -1 + \frac{\sin\Lambda\sin\lambda}{\alpha} - \frac{(1-e^2\sin^2\Lambda)\cos^2\Lambda}{\alpha^2(1-e^2)}$$

или исключивъ отсюда $\sin\lambda$ съ помощію урав. (29), найдемъ

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2\cos^4\Lambda}{1-e^2} \ldots\ldots (30)$$

Если возьмемъ такую вспомогательную дугу ζ, коей тангенсъ равняется корню послѣдняго члена, т. е.

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{e}{\sqrt{(1-e^2)}}\cos^2 A \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

то урав. (30) обратится въ

$$\alpha^2 = 1 + \operatorname{tang}^2\zeta = \sec^2\zeta, \text{ откуда } \alpha = \sec\zeta = \frac{1}{\cos\zeta} \ldots\ldots (32)$$

И такъ, когда широта A дана, то найдя ζ и α изъ урав. (31) и (32), рѣшать потомъ урав. (29), изъ коего получится широта λ. (*)

По опредѣленіи α и λ изъ урав. (32) и (29), хотя и можно будетъ вывесть длину радіуса R изъ урав. (28), однакоже дѣйствіе будетъ значительно проще, если изъ сего послѣдняго исключимъ $\cos\lambda$ съ помощію урав. (29), которое даетъ $\cos\lambda = \sqrt{1-\sin^2\lambda} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \sin^2 A}}{\alpha}$, а потомъ внесемъ въ урав.

(*) Для опредѣленія λ по данному A съ большею точностію, Гауссъ предлагаетъ другую формулу, выводъ коей есть слѣдующій:

Возьмемъ такую вспомогательную дугу η, чтобы

$$\operatorname{tang}\eta = \sin\zeta . \operatorname{tang} A \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

и подставимъ въ урав. (29) вмѣсто α его величину изъ урав. (32):

$$\sin\lambda = \cos\zeta . \sin A \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

Но урав. (33) даетъ $\frac{\sin^2\eta}{\cos^2\eta}$ или $\frac{1-\cos^2\eta}{\cos^2\eta} = (1-\cos^2\zeta)\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \ldots\ldots (b)$.

Исключивъ отсюда $\cos\zeta$ съ помощію урав. (a) и не забывая, что $\sin^2\lambda = 1 - \cos^2\lambda$, по сокращеніи получимъ

$$\cos\eta = \frac{\cos A}{\cos\lambda} \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Эту величину $\cos\eta$ подставя въ выраженіе $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\eta = \frac{1-\cos\eta}{1+\cos\eta}$, будетъ

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\eta = \frac{\cos\lambda - \cos A}{\cos\lambda + \cos A} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-\lambda)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+\lambda).$$

Такимъ же образомъ, взявъ выраженіе $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\zeta = \frac{1-\cos\zeta}{1+\cos\zeta}$, и исключивъ изъ него $\cos\zeta$ съ помощію урав. (a), найдемъ

(28) вмѣсто α его величину, выражаемую уравненіемъ (30). Исполнивъ это, по преобразованіи и сокращеніи получимъ

$$R = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 \Lambda} = \frac{A\sqrt{1-e^2}}{\cos^2\psi} \dots\dots\dots (35),$$

положивъ $$e\sin\Lambda = \sin\psi \dots\dots\dots\dots\dots (36).$$

Урав. (35) очевидно выражаетъ, что радіусъ R есть *средній пропорціональный между нормалью N и радіусомъ кривизны* ϱ *меридіана подъ широтою* Λ, $R=\sqrt{N\varrho}$ (см. ч. I, стр. 304).

Наконецъ урав. (22), подставя въ него Λ и λ вмѣсто L и l, даетъ

$$k = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)}{\operatorname{tg}^\alpha(45^\circ + \frac{1}{2}\Lambda)}\left(\frac{1+e\sin\Lambda}{1-e\sin\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)\operatorname{tg}^{\alpha e}(45^\circ + \frac{1}{2}\psi)}{\operatorname{tg}^\alpha(45^\circ + \frac{1}{2}\Lambda)}$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\zeta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Lambda-\lambda)\cot\tfrac{1}{2}(\Lambda+\lambda).$$

Перемноженіе сихъ уравненій даетъ

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Lambda-\lambda) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta \dots\dots\dots\dots (34)$$

И такъ, найдя ζ и η изъ уравненій (31) и (33), послѣ того изъ урав. (34) получится λ.

Обратный вопросъ, т. е. *опредѣленіе* Λ *по данному* λ рѣшается слѣдующимъ образомъ:

Урав. (a) даетъ

$$\sin^2\lambda = \cos^2\zeta - \cos^2\zeta \,.\, \cos^2\Lambda,$$

откуда $$\cos^2\lambda = \sin^2\zeta + \cos^2\zeta \,.\, \cos^2\Lambda.$$

Вычитаніе 1-го изъ 2-го, даетъ

$$\cos 2\lambda = 2\cos^2\zeta \,.\, \cos^2\Lambda - \cos 2\zeta.$$

Подставимъ сюда вмѣсто $\cos^2\Lambda$ его величину изъ урав. (31), и получимъ $$e\cos 2\lambda = \sin 2\zeta \,.\, \sqrt{1-e^2} - e\cos 2\zeta.$$

Если положимъ $e=\sin\varphi$, откуда $\sqrt{1-e^2}=\cos\varphi$, то выведенное нами урав. обратится въ

$$\sin(2\zeta-\varphi) = e\cos 2\lambda \dots\dots\dots\dots\dots (e)$$

Умножимъ теперь урав. (33) на урав. (c) и произведеніе раздѣлимъ на урав. (a), получимъ

$$\sin\eta = \operatorname{tang}\zeta \,.\, \operatorname{tang}\lambda \dots\dots\dots\dots\dots (f)$$

Отсюда видимъ, что если λ дано, то найдя изъ урав. (e) дугу ζ, потомъ изъ урав. (f) дугу η, останется рѣшить урав. (34), изъ коего получится широта Λ.

§ 520. По сложности формулы (22), займемся выводомъ уравненій болѣе удобныхъ для вычисленія l по данному L и обратно. Такъ какъ l есть функція отъ L, $l=f(\mathrm{L})$, то можемъ предположить, что когда широта L получила приращеніе $=\mathrm{U}$, тогда l обратилась въ $l+u$. Въ слѣдствіе чего разложивъ по тейлоровой теоремѣ, выраженіе $l+u=f(\mathrm{L}+\mathrm{U})$, получимъ

$$u=\frac{dl}{d\mathrm{L}}.\mathrm{U}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2l}{d\mathrm{L}^2}.\mathrm{U}^2+\tfrac{1}{6}\frac{d^3l}{d\mathrm{L}^3}\mathrm{U}^3+\tfrac{1}{24}.\frac{d^4l}{d\mathrm{L}^4}\mathrm{U}^4+\ldots\ldots$$

гдѣ u и U суть дуги, выраженныя въ частяхъ радіуса принятаго за единицу.

Но уже выведено нами было (см. урав. 24), что

$$\frac{dl}{d\mathrm{L}}=\frac{\alpha(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2\mathrm{L})\cos\mathrm{L}};$$

второе и третье дифференцированіе этого выраженія даетъ

$$\frac{d^2l}{d\mathrm{L}^2}=-\frac{\alpha(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2\mathrm{L})^2.\cos^2\mathrm{L}}\Big\{\alpha(1-e^2)\sin l-\sin\mathrm{L}+e^2(\sin^3\mathrm{L}-2\sin\mathrm{L}\cos^2\mathrm{L})\Big\}$$

$$\frac{d^3l}{d\mathrm{L}^3}=\frac{\alpha(1-e^2)\cos l}{(1-e^2\sin^2\mathrm{L})^3\cos^3\mathrm{L}}\Big\{\alpha(1-e^2)^2(\sin^2l-\cos^2l)$$
$$-3\alpha(1-e^2)\sin l(\sin\mathrm{L}-e^2(\sin^3\mathrm{L}-2\sin\mathrm{L}\cos^2\mathrm{L}))$$
$$+2\sin^2\mathrm{L}+\cos^2\mathrm{L}-e^2(4\sin^4\mathrm{L}-2\cos^4\mathrm{L})$$
$$+e^4(2\sin^6\mathrm{L}-\sin^4\mathrm{L}\cos^2\mathrm{L}+6\sin^2\mathrm{L}\cos^4\mathrm{L})\Big\}$$

Такимъ же образомъ получатся выраженія $\frac{d^4l}{d\mathrm{L}^4}$, $\frac{d^5l}{d\mathrm{L}^5}$ и т. д.

Подставя величину сихъ дифференціальныхъ коефиціентовъ въ вышепредложенный рядъ, доставится возможность по даннымъ L и l, опредѣлять на шарѣ $l+u$ соотвѣтственно какой либо широтѣ L+U на эллипсоидѣ. Если примемъ L и l за широты соотвѣтствующія главной параллели, то во всѣхъ дифференціальныхъ коефиціентахъ надобно положить $\mathrm{L}=\varLambda$ и $l=\lambda$. Сверхъ того для выраженія ихъ въ простѣйшемъ видѣ замѣтимъ, что такъ какъ урав. (28) даетъ

$$\alpha\cos\lambda = \frac{A\cos\varLambda}{R\sqrt{1-e^2\sin^2\varLambda}} = \frac{\cos\varLambda.\cos\psi}{\sqrt{1-c^2}}\text{ (по урав. 35 и 36)}$$

то подставя эту величину вмѣсто $\alpha\cos\lambda$, а потомъ $\sin\varLambda$ вмѣсто $\alpha\sin\lambda$ (по урав. 29) и наконецъ $\sin\psi$ вмѣсто $e\sin\varLambda$, по сдѣланіи преобразованій и сокращеній и по выраженіи u и U въ секундахъ получимъ

$$u = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos\psi}U + \tfrac{3}{2}\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{\cos^3\psi}\sin 1''.\cos\varLambda\sin\varLambda.U^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{\cos^5\psi}\sin^2 1''(\cos^2\varLambda-\sin^2\varLambda+e^2(4\cos^2\varLambda.\sin^2\varLambda+\sin^4\varLambda))\,U^3$$
$$-\tfrac{1}{24}\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{\cos^7\psi}.\sin^3 1''.\cos\varLambda\sin\varLambda\left\{16-e^2(49\cos^2\varLambda-13\sin^2\varLambda)-e^4(56\cos^2\varLambda\sin^2\varLambda+29\sin^4\varLambda)\right\}U^4$$

Отбросивъ въ сей формулѣ члены заключающіе въ себѣ e^6, по преобразованіи и сокращеніи найдемъ

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\cos\psi}.U + \tfrac{3}{4}\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{\cos^3\psi}\sin 1''.\sin(2\varLambda).U^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{\cos^5\psi}\sin^2 1''(\tfrac{5}{4}e^2\sin^2 2\varLambda+\cos^2\psi.\cos 2\varLambda)\,U^3 \\ &- \tfrac{1}{3}\frac{e^2\sqrt{1-e^2}}{\cos^7\psi}\sin^3 1''.\sin 2\varLambda(1-\tfrac{49}{16}e^2\cos 2\varLambda-\tfrac{9}{4}\sin^2\psi)U^4 \end{aligned}\right\}..(37).$$

И такъ, если даны широта L и долгота T точекъ на эллипсоидѣ и требуется перенести эти точки на шаръ, то поступятъ слѣдующимъ образомъ: 1-е) Избравъ среднюю широту $\varLambda$, по формуламъ предшествующаго §, найдутъ α, λ и ψ. 2-е) Изъ каждой данной широты L вычтя $\varLambda$, и означивъ разность L—$\varLambda$ выраженную въ секундахъ, чрезъ U, подставятъ ее въ формулу (37), которая дастъ u; послѣ того на шарѣ широта l, соотвѣтствующая данной L, получится если u приложатъ къ λ, $l=\lambda+u$. 3-е) Наконецъ для опредѣленія на шарѣ долготы t, соотвѣтствующей долготѣ T на эллипсоидѣ, умножатъ T на α и будетъ $t=\alpha T$ или $T\sec\zeta$ (см. ур. 32).

§ 521. Для рѣшенія обратнаго вопроса, т. е. для опредѣленія на сфероидѣ широты L по данной на шарѣ широтѣ

l, разложатъ по тейлоровой теоремѣ выраженіе $L + U = \varphi(l + u)$ и получатъ

$$U = \frac{dL}{dl}.u + \frac{1}{2}\frac{d^2L}{dl^2}.u^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3L}{dl^3}u^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4L}{dl^4} + \ldots\ldots$$

Но изъ урав. (24) имѣемъ

$$\frac{dL}{dl} = \frac{(1 - e^2\sin^2 L)\cos L}{\alpha(1 - e^2)\cos l}.$$

Дифференцированіе этого выраженія даетъ

$$\frac{d^2L}{dl^2} = \frac{(1 - e^2\sin^2 L)\cos L}{\alpha^2(1 - e^2)^2\cos^2 l}\Big\{\alpha(1 - e^2)\sin l - \sin L + e^2\sin^2 L$$
$$(\sin^2 L - 2\cos^2 L)\Big\}$$

Поступая съ сими и послѣдующими дифференціальными коефиціентами, какъ сказано въ предыдущемъ §, т. е. сперва подставя $\varLambda$ и λ вмѣсто L и l, потомъ исключивъ $\alpha\cos\lambda$ и $\alpha\sin\lambda$, и наконецъ внеся $U\sin 1''$ и $u\sin 1''$ вмѣсто U и u, получимъ

$$U = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 - e^2}}u - \frac{3}{2}\frac{e^2\sin 1''}{(1 - e^2)}\sin\varLambda\cos\varLambda . u^2$$

$$+ \frac{e^2\sin^2 1''}{2\sqrt{(1 - e^2)^3}\cos\psi}\Big\{\sin^2\varLambda - \cos^2\varLambda + e^2(5\cos^2\varLambda\sin^2\varLambda$$
$$- \sin^4\varLambda)\Big\}u^3$$

$$+ \frac{e^2\sin^3 1''.\cos\varLambda\sin\varLambda}{24(1 - e^2)^2\cos^2\psi}\Big\{16 + e^2(41\cos^2\varLambda - 77\sin^2\varLambda)$$
$$- e^4(101.\cos^2\varLambda\sin^2\varLambda - 61\sin^4\varLambda)\Big\}u^4$$

$$+ \frac{e^2\sin^4 1''}{120\sqrt{(1 - e^2)^5}\cos^3\psi}\Big\{16\cos^2\varLambda - 12\sin^2\varLambda + e^2(41\cos^4\varLambda$$
$$- 522\cos^2\varLambda.\sin^2\varLambda + 81\sin^4\varLambda)\Big\}u^5$$

Въ сей формулѣ, можемъ также отбросить члены, заключающіе въ себѣ $e^6\sin^3 1''$ и $e^4\sin^4 1''$; послѣ того, сдѣлавъ преобразованія и сокращенія, найдемъ

$$\left.\begin{aligned} U=&\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-e^2}}\,u-\tfrac{3}{4}.\frac{e^2\sin 1''.\sin 2\varLambda}{(1-e^2)}.u^2\\ &+\frac{e^2\sin^2 1''}{\sqrt{(1-e^2)^3}\cos\psi}\,(e^2\sin^2 2\varLambda-\cos^2\psi\cos 2\varLambda)\,u^3\\ &+\tfrac{1}{3}.\frac{e^2\sin^3 1''\sin 2\varLambda}{(1-e^2)^2\cos^2\psi}\left\{1+\tfrac{41}{16}e^2\cos 2\varLambda-\tfrac{9}{4}e^2\sin^2\psi\right\}u^4\\ &+\frac{e^2\sin^4 1''}{30\sqrt{(1-e^2)^5\cos^3\psi}}\left\{4\cos^2\varLambda-3\sin^2\varLambda\right\}u^5. \end{aligned}\right\}\ldots(38)$$

И такъ, когда по данной широтѣ l какой либо точки на шарѣ, желаютъ опредѣлить широту L соотвѣтствующей точки на эллипсоидѣ, то вычтя предварительно найденную широту λ изъ l и означивъ эту разность $l-\lambda$ выраженную въ секундахъ чрезъ u, подставятъ ее въ формулу (38): опредѣляемая ею величина U будучи приложена къ $\varLambda$ дастъ $L=\varLambda+U$.

§ 522. Урав. (23) также не удобно для практическаго вычисленія и потому полезно составить урав. болѣе простѣйшее. Такъ какъ $\log m$ есть функція отъ L, на прим. $\log m=f(L)$, то предположимъ, что отъ внесенія L+U вмѣсто L, количество $\log m$ обратилось въ $\log m'$, т. е. $\log m'=f(L+U)$. Разложивъ это по тейлоровой теоремѣ, получимъ

$$\log m'=\log m+\frac{d.\log m}{dL}.U+\tfrac{1}{2}\frac{d^2\log m}{dL^2}.U^2+\ldots\ldots$$

Но на стр. 215 выведено нами было (см. урав. 25), что

$$\frac{d\log m}{dL}=\frac{(1-e^2)(\sin L-\alpha\sin l)}{(1-e^2\sin^2 L)\cos L}.$$

Дифференцируя это выраженіе нѣсколько разъ послѣдовательно относительно L, получатъ дифференціальные коефиціенты предыдущаго ряда. Если введемъ $\varLambda$ и λ вмѣсто L и l, потомъ исключивъ l и α съ помощію прежнихъ уравненій, и не забывая, что подъ широтою $\varLambda$ количество m по условію $=1$, $\log m=0$, увидимъ, что $\frac{d\log m}{dL}$, $\frac{d^2\log m}{dL^2}$ обратятся въ нули, а искомый рядъ будетъ

$$\log m=-\frac{2e^2(1-e^2)\cos\varLambda\sin\varLambda\sin^3 1''}{3\cos^4\psi}U^3-\frac{e^2(1-e^2)\sin^4 1''}{6\cos^6\psi}(\cos^2\varLambda+11\cos^2\varLambda\sin^2\varLambda)\,U^4$$

гдѣ log означаетъ неперовъ логариѳмъ; для опредѣленія же бригова достаточно вторую часть урав. умножить на модуль M, $\log M = \bar{1}.6377843$.

Поступая такимъ же образомъ съ функціею $\log m = f(l)$, получимъ рядъ, выражающій неперовъ $\log m$ въ функціи дуги u на шарѣ, а именно:

$$\log m = -\tfrac{2}{3}\frac{e^2 \sin^3 1''}{\sqrt{1-e^2}.\cos\psi}\cos\Lambda.\sin\Lambda.u^3 - \frac{e^2 \sin^4 1''.\cos^2\Lambda}{6(1-e^2)\cos^2\psi}(1 - 7e^2\sin^2\Lambda)u^4 \ldots (39)$$

Въ большей части случаевъ, можно отбрасывать безъ чувствительной погрѣшности послѣдній членъ какъ въ этой, такъ и въ предшествующей формулѣ, и будетъ

$$\log m = -\tfrac{1}{3}.\frac{e^2 M.\sin^3 1''.\sin 2\Lambda}{\sqrt{1-e^2}.\cos\psi}u^3 \ldots\ldots\ldots (40)$$

гдѣ M есть модуль, и слѣд. гдѣ log означаетъ бриговъ логариѳмъ. Не должно забывать какъ въ сей, такъ и въ формулахъ (37) и (38) вводить u или U со знакомъ —, если $l < \lambda$ или $L < \Lambda$.

§ 523. Объяснимъ теперь употребленіе вышепредложенныхъ формулъ при вычисленіи широты и долготы точекъ тригонометрической сѣти. Это дѣйствіе начинается избраніемъ средней широты Λ, т. е. соотвѣтствующей той параллели, которая проходитъ чрезъ средину пространства занимаемаго треангуляціею и въ вычисленіи сперва вспомогательныхъ дугъ ξ, η (изъ урав. 31 и 33), потомъ широты λ на шарѣ (изъ урав. 34) соотвѣтствующей широтѣ Λ на эллипсоидѣ, и наконецъ радіусъ R шара изъ урав. (36).

Пусть M и M′ будутъ на поверхности земли двѣ послѣдовательныя точки триг. сѣти, K длина (въ саженяхъ) бока ихъ соединяющаго, L и L′ широты сихъ точекъ, P разность ихъ долготъ, и Z азимутъ бока K при точкѣ M. Предполагая, что широта L и азимутъ найдены непосредственно чрезъ астрономическія наблюденія, означимъ соотвѣтствующія имъ величины на шарѣ чрезъ l, l', p, k и z. Здѣсь $z = Z$, ибо предполагаемъ, что бокъ тригон. сѣти будучи означенъ на

шарѣ, по малости длины своей сливается съ дугою большаго круга, соединяющаго его оконечности (см. стр. 213).

Вычисленіе исполняется въ слѣдующемъ порядкѣ:

1-е) По даннымъ Λ, λ и L опредѣляются по формулѣ (37) разность широтъ $u = l - \lambda$ какъ объяснено было въ § 520; послѣ чего будетъ $l = \lambda + u$.

2-е) Такъ какъ проложеніе k бока триг. сѣти на шарѣ получится, если соотвѣтствующую ему дугу K на эллипсоидѣ умножимъ на m, $k = m$K (см. стр. 193), то по найденной u вычисляется бриг. $\log m$ по формулѣ (40), и приложать его къ $\log$K, и будетъ $\log k = \log$K $+ \log m$ (*). Здѣсь k найдется въ саженяхъ; для опредѣленія же числа секундъ a въ ней заключающихся, раздѣлять k на $R \sin 1''$, $a = \frac{k}{R \sin 1''}$, гдѣ R соотвѣтствуетъ широтѣ Λ.

3-е) По найденнымъ l и a, и по данному азимуту z, вычислять l', p и z' по формуламъ Лежандра, или Гаусса (см. Отдѣл. IV, главу I).

4-е) Вычтя λ изъ найденной широты l', разность выразить u'. Подставя u' вмѣсто u въ урав. (38), получать U'; послѣ чего $L' = \Lambda + U'$.

5-е) Искомая разность долготъ P на эллипсоидѣ получится, если найденная долгота p умножится на постоянное $\cos \zeta$, $P = p . \cos \zeta$, (см. урав. 22 и 32).

При семъ должно замѣтить, что такъ какъ при вычисленіи широты каждой изъ послѣдующихъ точекъ тригон. сѣти, встрѣчается надобность всякой разъ по найденной на шарѣ широтѣ l' опредѣлять L' на эллипсоидѣ посредствомъ урав. (38), то дѣйствіе значительно сократится, если это урав. разложено будетъ въ таблицу, которая бы для $\lambda + u$ давала соотвѣтствующую $\Lambda + U$ отъ 1' до 1', ибо тогда искомое L' можно будетъ опредѣлять посредствомъ простаго интерполированія. Вычисляя подобнаго рода таблицу будетъ удобнѣе за нормальную или среднюю широту принять не Λ, какъ гово-

---

(*) Впрочемъ если $u < \pm 2^\circ$, то m будетъ $= 1$, а $\log m = 0$, и потому во все не надобно вводить эту поправку въ длину бока тригон. сѣти.

рено было выше, но λ, т. е. находящуюся на шарѣ и потомъ по данному λ вычислить ζ, η и Λ руководствуясь сказанымъ въ концѣ примѣчанія на стр. 217.

Для практическаго употребленія этого способа, предлагаемъ здѣсь численныя величины η, ζ, Λ, доп. $\log(R\sin 1'')$ и коефиціенты формулъ (37), (38) и (40), принимая за данную среднюю широту на шарѣ $\lambda = 54°$, что доставитъ возможность вычислять широту и долготу точекъ между параллелями, лежащими подъ 48° и 60°, т. е. отстоящими отъ средней на ±6°.

$\lambda = 54°$, $\zeta = 1°37'11'',064$ (изъ урав. e), $\log\cos\zeta = 9.99982656$
$\eta = 2°13'49'',939$ (изъ урав. f), $\Lambda = 54°1'53'',527$ (изъ урав. 34)
$\psi = 3°47'28'',3$ (изъ урав. 36) доп. $\log R\sin 1'' = \overline{2}.8384378$ (урав. 35).

Коефиціенты урав. (37), имѣющаго видъ

$$u = C_1 U + C_2 U^2 + C_3 U^3 + C_4 U^4$$

будутъ
$$\log C_1 = \overline{1}.9994973$$
$$\log C_2 = \overline{8}.3644976$$
$$\log C_3 = \overline{14}.3766405-$$
$$\log C_4 = \overline{19}.3892465-$$

коефиціенты же урав. (38), имѣющаго видъ

$$U = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + c_5 u^5$$

будутъ
$$\log c_1 = 0.0005027$$
$$\log c_2 = \overline{8}.3660057-$$
$$\log c_3 = \overline{14}.3972970$$
$$\log c_4 = \overline{19}.3874465$$
$$\log c_5 = \overline{26}.8641273-$$

Наконецъ логариѳмъ коефиціента урав. (40) $\log m = -Eu^3$ есть $\log E = \overline{19}.02225$. Наприм. примемъ за данныя географ. широту $L = 58°31'20''$ (на земномъ сфероидѣ), длину бока въ саженяхъ $\log K = 4.5502284$ и его азимутъ $Z = 35°24'41'',22$. Здѣсь U или $L - \Lambda = 4°29'26'',473 = 16166,473$. Вычисленіе начинаемъ опредѣленіемъ u и l и длины дуги k на шарѣ:

вычисл. урав. (37).

$C_1 \ldots \bar{1}.9994973$
$U \ldots 4.2086154$

$4.2081127 \ldots$ 1-й чл. $= + 4^\circ 29' 7'',778$

$C_2 \ldots \bar{8}.3645$
$U_2 \ldots 8.4172$

$0.7817 \ldots$ 2-й чл. $= +$ 6,049

$C_3 \ldots \overline{14}.3766-$
$U^3 \ldots 12.6259$

$\bar{1}.0025- \ldots$ 3-й чл. $= -$ 0,100

$C_4 \ldots \overline{19}.3892-$
$U^4 \ldots 16.8345$

$\bar{2}.2237- \ldots$ 4-й чл. $= -$ 0.017

$u = 4.29.13,810$
$\lambda = 54.\ 0.\ 0$

$l = 58.29.13,810$

вычисл. урав. (40).

$\log u = 4.20827$
$\log u^3 = 12.6248$
$\log E = \overline{19}.0222-$

$\log\log m = \bar{7}.6470-$

$\log m = -0,0000004$
$\log K = 4.5502284$

$\log k = 4.5502280$
доп. $\log(R \sin 1'') = \bar{2}.8384378$

$\log a = 3.3886658$

вычисл. l' *и* p *по урав.* § 395.

$a \ldots 3.3886658$
$\cos z \ldots 9.9111640$

$\alpha \ldots 3.2998298$
$4\mu\beta^2 = +0,0000068$

$x \ldots 3.2998366$

$x = +0^\circ 33' 14'',512$
$l = 58.29.13.\ 81$

$l + x = 59.\ 2.28,\ 32$

$a \ldots 3.3886658$
$\sin z \ldots 9.7630115$

$\beta \ldots 3.1516773$
$\beta^2 \ldots 6.3034$
$\mu \ldots \overline{13}.9297$

$\mu\beta^2 \ldots \bar{6}.2331$
$\mu\beta^2 = 0,0000017.$

$\beta \ldots 3.1516773$
доп. $\cos(l+x) . 0.2886808$

$\gamma \ldots 3.4403581$
$\sin(l+x) \ldots 9.9332531$

$\delta \ldots 3.3736112$

$\gamma \ldots 3.4403581$
$4\mu\delta^2 = \quad -190$
$2\mu\alpha^2 = \quad -\ 67$

$p \ldots 3.4403324$
Постоян. $\cos\zeta . 9.9998266$

$P \ldots 3.4401590$

$\delta^2 \ldots 6.7472$
$\mu \ldots \overline{13}.9297$

$\mu\delta^2 \ldots 6.6769$
$\mu\delta^2 = 0,0000047.5$
$P = 0^\circ 45' 55'',238$

$\alpha^2 \ldots 6.5996$
$\mu \ldots \overline{13}\ 9297$

$\mu\alpha^2 \ldots \bar{6}.5293$
$\mu\alpha^2 = 0,0000033.8$

$\frac{1}{2}$....$\bar{1}.69897$	u....4.2586420		
β....3.15168	c_1....0.0005027		
δ....3.37361	4.2591447.....	1-й чл. =	$5^\circ 2' 41'',204$
$\sin 1''$....$\bar{4}.68557$	u^2....8.5173		
σ....0.90983	c_2....$\bar{8}.3660$—		
$x = +0^\circ 33' 14'',512$	0.8833—......	2-й » =	—7,626
$\sigma = -$ 8,125	u^3..12.7759		
$l'-l =$ 0. 33. 6,387	c_3..$\overline{14}.3973$		
$l =$ 58. 29. 13,810	$\bar{1}.1732$........	3-й » =	+0,149
$l' =$ 59. 2. 20,197(*)	u^4..17.0346		
$\lambda =$ 54.	c_4..$\overline{19}.3874$		
$u =$ 5. 2. 20,197	$\bar{2}.4220$.........	4-й » =	+0,026
		сумма U =	5. 2. 33,753
			Λ=54. 1. 53,527
		иском. широта L′ =	59. 4. 37,280.

§ 524. Излагая способъ Гаусса вычисленія широты и долготы точекъ сѣти, мы принимали проложеніе на шарѣ каждаго бока изъ ея треугольниковъ, за дугу большаго круга. Хотя отъ этаго предположенія не можетъ произойдти никакой чувствительной погрѣшности въ результатахъ, однакоже для полноты теоріи, займемся опредѣленіемъ величины поправки для азимута, выражающей величину угла между проложеніемъ на шарѣ геодезической линіи и дугою большаго круга, соединяющаго ея оконечности.

Предположимъ, что МabМ′ (чер. 235) есть проложеніе на поверхности шара геодезич. линіи, а М$a'b'$М′ вышесказанная дуга большаго круга. Изобразимъ длину данной геодезической линіи на поверхности земнаго сфероида чрезъ S, а длину ея проложенія МabМ′ чрезъ s. Опустимъ изъ произвольной точки a перпендикулярную дугу aa' на линію М$a'b'$М′, и примемъ ее за ординату, а разстояніе подошвы ея отъ точки М за абсциссу, $aa' = y$, М$a' = x$. Для другой точки b взятой въ безконечно близкомъ разстояніи отъ a, будетъ М$b' = x + dx$,

(*) Не должно забывать, что эту найденную широту l', при вычисленіи долготы и широты послѣдующей точки, должно принимать за данную l, и что по урав. (37) опредѣляется широта только *начальной точки.*

$bb'=y+dy$. Эти координаты y и x, также какъ и dy и dx, предполагаемъ выраженными въ частяхъ радіуса принятаго за 1-цу, и потому еслибы пожелали ввести въ вычисленіе дѣйствительную ихъ длину, то надлежало бы умножить ихъ на радіусъ R шара. Если проведемъ чрезъ точку *a* дугу *ac* малаго круга, параллельнаго съ $Ma'b'M'$, то длина ее будетъ $=a'b'.\cos y$ или $=dx.\cos y$. Означимъ уг. *cab* ею образуемый съ элементомъ *ab* чрезъ θ; прямоуг. треуг. *abc*, разсматриваемый за прямолинейный, даетъ $\tang\theta=\frac{bc}{ac}=\frac{dy}{\cos y.dx}$, и $ac=ab.\cos\theta$, откуда $ab=\frac{ac}{\cos\theta}$ или $=\frac{\cos y}{\cos\theta}.dx$, а слѣд.

$$ds=\frac{R\cos y}{\cos\theta}.dx.$$

Здѣсь ввели R, ибо подъ ds подразумѣваемъ элементъ разсматриваемой кривой на шарѣ, коего радіусъ есть R. Но какъ съ другой стороны, каждый таковый элементъ, въ слѣдствіе условія принятаго за основаніе всей теоріи, получится, если соотвѣтствующій ему элементъ dS на поверхности земли умножится на m, $ds=m.dS$, то будетъ

$$dS=\frac{R\cos y}{m\cos\theta}dx\ldots\ldots\ldots\ldots(41).$$

Если для сокращенія положимъ $\frac{\cos y}{m}=n$, (гдѣ n есть функція отъ x и y) и $\log\text{tg}(45°+\frac{1}{2}y)=v$, чего дифференціалъ есть $dv=\frac{dy}{\cos y}$, то получимъ

$$\tang\theta=\frac{dy}{\cos y.dx}=\frac{dv}{dx},$$

а урав. (41) обратится въ

$$dS=\frac{Rn}{\cos\theta}.dx \text{ или }=Rn.dx\sqrt{1+\tang^2\theta}=Rn\,dx\sqrt{1+\frac{dv^2}{dx^2}}.$$

По условію вопроса, главнѣйшее свойство линіи $MabM'$ состоитъ въ томъ, что соотвѣтствующая ей линія S на эллипсоидѣ должна быть кратчайшею. Это свойство выражается аналитически тѣмъ, что интегралъ выведеннаго элемента между опредѣленными предѣлами, т. е.

$$S = R\int \frac{n}{\cos\theta}.dx \text{ или } R\int n\sqrt{1+\frac{dv^2}{dx^2}}.dx,$$

долженъ быть *minimum*. Поступая при интегрированіи сего выраженія одинаково какъ объяснено было на стр. 68, получимъ

$$\frac{dn}{dv}\sqrt{1+\frac{dv^2}{dx^2}}.dx = d\,\frac{\frac{n dv}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dv^2}{dx^2}}}$$

или
$$\frac{dn}{dv}\cdot\frac{dx}{\cos\theta} = d(n\sin\theta).$$

Здѣсь подъ $\frac{dn}{dv}$ подразумѣвается частный дифференціалъ. Такъ какъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ принимается во вниманіе лишь часть кривой, заключающейся между точками M и M′, то v и θ будутъ имѣть весьма малую величину, и потому можно положить $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \tang\theta$, а слѣд.

$$\frac{dn}{dv}.dx = d(n\tang\theta),$$

чего интегралъ будетъ

$$n\tang\theta = \int\frac{dn}{dv}.dx + \textit{постоян.}$$

Если въ выраженіяхъ $n = \frac{\cos y}{m}$ и $\frac{dn}{dv} = \frac{-m\sin y.dy - \cos y.dm}{m^2 dv}$, положимъ $y=0$ или что все равно $v=0$, отъ чего они обратятся въ $n = \frac{1}{m}$ и $\frac{dn}{dv} = -\frac{dm}{m^2.dv}$ или $= -\frac{dm}{m^2.dy}$, и потомъ сіи величины подставимъ въ выведенную нами теперь формулу, то получимъ

$$\frac{\tang\theta}{m} = -\int\frac{dm}{m^2.dy}.dx + \textit{постоян.}\ \ldots\ldots (42)$$

что соотвѣтствуетъ на сфероидѣ не геодезической линіи, но той кривой, которая на поверхности шара обозначается дугою большаго круга $Ma'b'M'$.

Такъ какъ абсциссы считаемъ отъ M къ M′, то при точкѣ

M будетъ $x=0$, а при точкѣ M' абсцисса будетъ равна длинѣ дуги $Ma'b'M'$, которую положимъ $=a$, предположивъ, что она выражена въ частяхъ радіуса, принятаго за 1-цу. Означимъ для сокращенія $\frac{dm}{m.dy}$ чрезъ μ. Хотя величина μ вообще есть функція отъ x и y; но для линіи $Ma'b'M'$ она будетъ функціею одного только x, ибо для сей линіи $y=0$. Наконецъ пусть θ_0, m_0, μ_0 будутъ опредѣленныя величины, въ которыя при точкѣ M обращаются θ, m и μ, а θ_1, m_1 и μ_1 соотвѣтствующія точкѣ M'. При первой изъ сихъ точекъ, урав. (42) обратится въ

$$\frac{\tan g\theta_0}{m_0}=\textit{постоян.},$$

послѣ чего будетъ

$$\frac{\tan g\theta}{m}=\frac{\tan g\theta_0}{m_0}-\int\frac{\mu}{m}.dx$$

откуда
$$\tan g\theta=\frac{m.\tan g\theta_0}{m_0}-m\int\frac{\mu}{m}.dx\ldots\ldots(43)$$

Предположимъ теперь, что μ и m разложены по возрастающимъ степенямъ x, въ слѣдующіе ряды:

$$\left.\begin{array}{l}\mu=\mu_0+\alpha x+\alpha' x^2+\ldots\ldots\\ m=m_0(1+\beta x+\beta' x^2+\ldots\ldots)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

а по раздѣленіи сихъ рядовъ одного на другой, найдемъ

$$\frac{\mu}{m}=\frac{1}{m_0}(\mu_0+(\alpha-\mu_0\beta)x)+(\alpha'-\alpha\beta+\mu_0\beta^2+\mu_0\beta')x^2+\ldots\ldots\ldots$$

подставя сіи выраженія въ урав. (43), исполнивъ интегрированіе, по преобразованіи получимъ

$$\tan g\theta=(1+\beta x+\beta' x^2+\ldots)\tan g\theta_0-\mu_0 x-\tfrac{1}{2}(\alpha+\mu_0\beta)x^2$$
$$-(\tfrac{1}{3}\alpha'+\tfrac{1}{6}\beta\alpha-\tfrac{1}{6}\mu_0\beta^2+\tfrac{2}{3}\mu_0\beta')x^3-\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

Но какъ $\tan g\theta=\frac{dv}{dx}$, $dv=\tan g\theta.dx$, а слѣд. $v=\int tg\theta.dx$, то подставя выведенный нами рядъ вмѣсто $\tan g\theta$, и вторично объинтегрировавъ, найдемъ

$$v=(x+\tfrac{1}{2}\beta x^2+\tfrac{1}{3}\beta' x^3+\ldots)\tan g\theta_0-\tfrac{1}{2}\mu_0 x^2-\tfrac{1}{6}(\alpha+\mu_0\beta)x^3$$
$$-(\tfrac{1}{12}\alpha'+\tfrac{1}{24}\beta\alpha-\tfrac{1}{24}\mu_0\beta^2+\tfrac{2}{3}\mu_0\beta')x^4+\ldots\ldots$$

гдѣ не введено постояннаго количества, ибо при $x=0$ будетъ также и $v=0$. Но какъ при положеніи $x=a$, количество v обратится также въ нуль, то

$$(1+\tfrac{1}{2}\beta a+\tfrac{1}{3}\beta' a^2+\ldots)\tan\theta_0=\tfrac{1}{2}\mu_0 a+\tfrac{1}{6}(\alpha+\mu_0\beta)a^2$$
$$+(\tfrac{1}{12}\alpha'+\tfrac{1}{24}\beta\alpha-\tfrac{1}{24}\mu_0\beta^2+\tfrac{2}{3}\mu_0\beta')a^3+\ldots.$$

откуда

$$\tan\theta_0=\tfrac{1}{2}\mu_0 a+(\tfrac{1}{6}\alpha-\tfrac{1}{12}\mu_0\beta)a^2+(\tfrac{1}{12}\alpha'-\tfrac{1}{24}\alpha\beta)a^3\ldots.(46)$$

Если въ урав. (45) вмѣсто x подставимъ a, а вмѣсто $\tan\theta_0$ выведенную нами теперь его величину, то $\tan\theta$ обратится въ $\tan\theta_1$, и будетъ

$$\tan\theta_1=-\tfrac{1}{2}\mu_0 a-(\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{12}\mu_0\beta)a^2$$
$$-(\tfrac{1}{4}\alpha'+\tfrac{1}{24}\alpha\beta-\tfrac{1}{12}\mu_0\beta^2+\tfrac{1}{6}\mu_0\beta')a^3\ldots\ldots.(47).$$

Здѣсь $\tan\theta_0$ и $\tan\theta_1$ выражаются посредствомъ $\alpha, \alpha'\ldots$ $\beta, \beta', \ldots$ которыхъ величина неизвѣстна. Для исключенія оныхъ, можно поступить слѣдующимъ образомъ: положивъ въ формулахъ (44) $x=a$, отъ чего μ и m обратятся въ μ_1 и m_1 и будетъ

$$\mu_1=\mu_0+\alpha a+\alpha' a^2+\ldots\ldots$$
$$m_1=m_0(1+\beta a+\beta' a^2+\ldots\ldots)$$

Подставя сіи величины въ выраженія $\tfrac{1}{3}(\mu_0+\tfrac{1}{2}\mu_1)\ a\sqrt[6]{\frac{m_0}{m_1}}$ и $-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\mu_0+\mu_1)\,a\sqrt[6]{\frac{m_1}{m_0}}$, получимъ слѣдующіе два ряда:

$$\tfrac{1}{3}a(\mu_0+\tfrac{1}{2}\mu_1)\sqrt[6]{\frac{m_0}{m_1}}=\tfrac{1}{2}\mu_0 a+(\tfrac{1}{6}\alpha-\tfrac{1}{12}\mu_0\beta)a^2$$
$$+(\tfrac{1}{6}\alpha'-\tfrac{1}{36}\alpha\beta+\tfrac{7}{144}\mu_0\beta^2-\tfrac{1}{12}\mu_0\beta')a^3\ldots.(48)$$

$$-\tfrac{1}{3}a(\tfrac{1}{2}\mu_0+\mu_1)\sqrt[6]{\frac{m_1}{m_0}}=-\tfrac{1}{2}\mu_0 a-(\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{1}{12}\mu_0\beta)a^2$$
$$-(\tfrac{1}{3}\beta'+\tfrac{1}{18}\alpha\beta-\tfrac{5}{144}\mu_0\alpha^2+\tfrac{1}{12}\mu_0\beta')a^3\ldots(49)$$

Сравнивая урав. (46) съ (48), также урав. (47) съ (48), видимъ, что вторыя ихъ части включительно до членовъ, заключающихъ a^2, равны между собою, а потому по чрезвычайной малости остальныхъ, можемъ принять, что

$$\tang\theta_0 = \tfrac{1}{3} a (\mu_0 + \tfrac{1}{2}\mu_1) \sqrt[6]{\frac{m_0}{m_1}},$$

$$\tang\theta_1 = -\tfrac{1}{3} a (\tfrac{1}{2}\mu_0 + \mu_1) \sqrt[6]{\frac{m_1}{m_0}},$$

и какъ θ_0 и θ_1 суть углы весьма малые, а m_0 почти равно m_1, то будетъ

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{a}{3\sin 1''}(\mu_0 + \tfrac{1}{2}\mu_1) \\ \theta_1 &= -\frac{a}{3\sin 1''}(\tfrac{1}{2}\mu_0 + \mu_1) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(50)$$

Остается опредѣлить $\mu = \frac{dm}{m.dy}$.

Принимая, какъ и прежде, aa' и bb' за перпендикуляры опущенные изъ двухъ точекъ a и b, взятыхъ на кривой $MabM'$ представляющей на шарѣ проложеніе геодезической линіи, на дугу большаго круга $Ma'b'M'$ соединяющаго ея оконечности, а ac за дугу малаго круга параллельнаго къ сему послѣднему, будетъ $bc = dy$, $ac = \frac{dx}{\cos y}$ или $= dx$. Пусть Na будетъ меридіанъ проходящій чрезъ точку a. Уголъ Nac выразитъ азимутъ дуги ac или что все равно, дуги большаго круга $Ma'b'M'$ при точкѣ a'. Означимъ сей азимутъ, (считаемый отъ сѣвера къ востоку до 360°) чрезъ χ, а широту точки a чрезъ l. Опустивъ изъ b и c перпендикуляры bo и ck на меридіанъ, а изъ c перпендикуляръ cn на bo, безконечно малая дуга ao выразитъ dl, и будетъ $dl = ak - ko$ или $= ak - cn$; но прямоуг. треуг-ки ack и cbn даютъ $ak = dx \cos\chi$, $cn = dy \sin\chi$, и будетъ

$$dl = \cos\chi . dx - \sin\chi\, dy,$$

гдѣ $\cos\chi$ очевидно выражаетъ частный дифференціалъ широты l въ отношеніи къ dx, а $-\sin\chi$ въ отношеніи къ dy.

Но какъ m есть функція отъ l, $m = f(l)$, а l можно также разсматривать за функцію отъ y, $l = \varphi(y)$, и потому дифференціалъ отъ m въ отношеніи къ dy, будетъ

$$\frac{dm}{dy} = \frac{dm}{dl} \cdot \frac{dl}{dy},$$

то подставя $-\sin\chi$ вмѣсто $\frac{dl}{dy}$, будетъ

$$\frac{dm}{dy} = -\sin\chi \cdot \frac{dm}{dl},$$

откуда $$\frac{dm}{m.dy} \text{ или } \mu = -\sin\chi \frac{dm}{m.dl}.$$

И такъ, если изобразимъ азимутъ дуги большаго круга $Ma'b'M'$ при точкѣ M чрезъ z_0, а при точкѣ M' чрезъ $180° + z_1$ (гдѣ z_1 очевидно выражаетъ избытокъ самаго азимута надъ 180_0), то

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 &= -\sin z_0 \frac{dm_0}{m_0.dl} \\ \mu_1 &= +\sin z_1 \frac{dm_1}{m_1.dl} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51).$$

Для опредѣленія величины $\frac{dm}{m.dl}$ одифференцируемъ урав. (39), и какъ, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, $dl = du \sin 1''$ (ибо du въ урав. (39) выразитъ число секундъ дуги, а dl есть дуга выраженная въ частяхъ радіуса принятаго за 1-цу), то

$$\frac{dm}{mdl} = -\frac{2e^2 \sin^2 1''.\sin\Lambda\cos\Lambda}{\sqrt{1-e^2}.\cos\psi} u^2.$$

Здѣсь u означаетъ избытокъ широты l надъ среднею λ. Если этотъ избытокъ для точекъ M и M', изобразимъ чрезъ u_0 и u_1, то получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm_0}{m_0dl} &= -2D\sin 1''.u^2{}_0 \\ \frac{dm_1}{m_1dl} &= -2D\sin 1''.u^2{}_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

положивъ для сокращенія $D = \frac{e^2 \sin 1''.\sin\Lambda\cos\Lambda}{\sqrt{1-e^2}.\cos\psi}$.

Подставя эти величины въ урав. (51), будетъ

$$\mu_0 = +2D\sin 1''.\sin z_0.u^2{}_0$$
$$\mu_1 = -2D\sin 1''.\sin z_1.u^2{}_1$$

Послѣ чего уравненія (50) обратятся въ

$$\left.\begin{aligned}\theta_0 &= \tfrac{1}{3}a\mathrm{D}(2u^2{}_0\sin z_0 - u_1^2\sin z_1)\\ \theta_1 &= \tfrac{1}{3}a\mathrm{D}(2u_1^2\sin z_1 - u^2{}_0\sin z_0)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(53).$$

Недолжно забывать, что a означаетъ здѣсь длину дуги на шарѣ выраженную въ частяхъ радіуса принятаго за 1-цу, и потому еслибы она дана была въ секундахъ, то вмѣсто a надлежало бы подставить $a\sin 1''$, а еслибы въ линейной мѣрѣ, то $\frac{a}{\mathrm{R}}$. Для средней широты $\varLambda = 54°1'53'',527$ (см. стр. 224) вычисленіе даетъ $\log \mathrm{D} = \overline{8}.1894117$.

При употребленіи формулъ (53) должно принимать u_0, z_0 и θ_0 соотвѣтствующими точкѣ лежащей къ западу, а u_1, z_1 и θ_1 къ востоку. Такъ какъ по условію z_0 и $180° + z_1$ означаютъ на шарѣ азимутъ дуги большаго круга, соединяющаго обѣ данныя точки, то азимутъ геодезической линіи соединяющей сіи точки на эллипсоидѣ, будетъ $\mathrm{Z}_0 = z_0 + \theta_0$, $\mathrm{Z}_1 = z_1 - \theta_1$; отсюда видимъ, что если по даннымъ на эллипсоидѣ азимутамъ Z_0 и Z_1 желаютъ опредѣлить азимуты z_0 и z_1 дуги на шарѣ, то θ_0 надобно брать со знакомъ —, а θ_1 съ +, ибо $z_0 = \mathrm{Z}_0 - \theta_0$, $z_1 = \mathrm{Z}_1 + \theta_1$. Къ сему должно присовокупить, что θ_0 и θ_1 предполагаются найденными изъ уравненій (53) со знакомъ +; но еслибы θ_0 и θ_1 или одно изъ нихъ получились со знакомъ —, тогда при опредѣленіи Z_0 и Z_1 по даннымъ z_0 и z_1 или обратно, надлежало бы θ_0 и θ_1 вводить со знаками противными, какъ сказано было выше.

§ 525. Для опредѣленія на эллипсоидѣ длины S геодезической линіи, достаточно взять интегралъ урав. (41)

$$\mathrm{S} = \mathrm{R}\int \frac{\cos\gamma}{m\cos\theta}.dx$$

отъ $x = 0$ до $x = a$. Положивъ здѣсь $\cos\gamma = 1$, $\cos\theta = 1$ и внеся вмѣсто m его величину, выражаемую урав. (44), получимъ

$$\mathrm{S} = \mathrm{R}\int_0^a \frac{dx}{m_0(1 + \beta x + \beta' x^2 + \ldots)}$$

$$= \frac{\mathrm{R}}{m_0}\int (1 - \beta x + (\beta^2 - \beta')x^2 + \ldots)dx$$

$$= \frac{\mathrm{R}}{m_0}(1 - \tfrac{1}{2}\beta a + \tfrac{1}{3}(\beta^2 - \beta')a^2 \ldots)a$$

подставя a вмѣсто x. При семъ должно замѣтить, что если возьмемъ выраженіе $\sqrt{\frac{m_0}{m_1}}$ и вмѣсто $\frac{m_0}{m_1}$ внесемъ его величину изъ урав. (44), то получимъ

$$\sqrt{\frac{m_0}{m_1}} = 1 - \tfrac{1}{2}\beta a + (\tfrac{3}{8}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\beta')a^2 \ldots .$$

Но какъ этотъ рядъ безъ чувствительной погрѣшности можно принимать равнымъ многочлену заключающемуся въ скобкахъ, то

$$S = \frac{Ra}{\sqrt{m_0 m_1}}$$

и какъ Ra выражаетъ на шарѣ длину дуги большаго круга соединяющаго данныя точки, то изобразивъ длину сей дуги чрезъ s, получимъ

$$S = \frac{s}{\sqrt{m_0 m_1}} \text{ или } s = S\sqrt{m_0 m_1} \ldots\ldots\ldots (54).$$

§ 526. Въ заключеніе примѣнимъ эту теорію къ опредѣленію кратчайшаго разстоянія между двумя отдаленными пунктами, географическое положеніе коихъ съ строгою точностію извѣстно, на прим. между *Пулковскою* и *Московскою* обсерваторіями. Данныя суть:

Пулков. обсерв. геогр. шир. $L = 59°46'18'',7$, долг. отъ Парижа $= 27°59'16''$
Москов. обсерв. » » $L' = 55.45.17,97$, » » » $= 35.13.44$

разность долготъ $P = 7.14.28$.

Примемъ на шарѣ среднюю широту $\lambda = 54°$; соотвѣтствующая ей на эллипсоидѣ (см. стр. 224) будетъ $\Lambda = 54°1'53'',53$. Для опредѣленія положенія на шарѣ вышесказанныхъ пунктовъ, поступаемъ какъ объяснено было въ § 520, т. е. вычтя Λ изъ L и L' и каждую изъ сихъ разностей подставя въ урав. (37) вмѣсто U, получимъ $u_0 = 5°44'1'',90$, $u_1 = 1°43'18'',15$, а потомъ l или $\lambda + u_0 = 59°44'1'',90$, l' или $\lambda + u_1 = 55°43'18'',15$. Послѣ того обративъ данную разность P долготъ въ секунды и подставя ее въ урав. $P = p\cos\zeta$ (см. стр. 223), найдемъ $p = 7°14'38'',4$.

Опредѣливъ такимъ образомъ на шарѣ положеніе обѣихъ точекъ, рѣшаемъ сферич. треуг. по двумъ бокамъ $90° - l$ и

$90^\circ - l'$, и заключающемуся между ними углу p. Посредствомъ неперовыхъ аналогій (см. ч. I. стр. 27, урав. 64), которыя въ семъ случаѣ обратятся въ

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(M_0 + M_1) = \cot\tfrac{1}{2}p \frac{\cos\frac{1}{2}(l - l')}{\sin\frac{1}{2}(l + l')},\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(M_0 - M_1) = \cot\tfrac{1}{2}p \frac{\sin\frac{1}{2}(l - l')}{\cos\frac{1}{2}(l + l')}$$

найдемъ уг. $M_0 = 132^\circ 56' 21'',70$, уг. $M_1 = 40^\circ 55' 46'',60$

Здѣсь уг. M_0 выражаетъ на шарѣ азимутъ z_0 дуги при точкѣ лежащей къ западу, а уг. M_1 дополненіе до 360° азимута оной при точкѣ лежащей къ востоку. Означивъ сей послѣдній чрезъ $180^\circ + z_1$, получимъ $z_1 = 139^\circ 4' 13'',40$.

Для опредѣленія же третьяго бока, градусную величину коего изобразимъ чрезъ a, беремъ урав. $\sin a = \sin p \frac{\cos l'}{\sin z_0}$ или $= \sin p \frac{\cos l}{\sin z_1}$ и найдемъ $a = 5^\circ 34' 1'',21$; послѣ чего длину s сей дуги въ саженяхъ, получимъ изъ урав. $s = a R \sin 1''$ (см. стр. 224) и будетъ $\log s = 5.4634861$.

По условію вопроса остается опредѣлить величины на эллипсоидѣ, соотвѣтствующія найденнымъ.

Опредѣленіе азимутовъ. Подставя въ урав. (53) вмѣсто z_0, z_1, u_0, и u_1 ихъ численныя величины, а вмѣсто a внеся $a \sin 1''$ или $\frac{s}{R}$ получимъ $\theta_0 = + 0'',2999$ или $= + 0'',300$, $\theta_1 = - 0'',132$. Но какъ $Z_0 = z_0 + \theta_0$, $Z_1 = z_1 - \theta_1$, и какъ θ_1 получилось со знакомъ —, то обѣ сіи поправки θ_0 и θ_1 надобно приложить къ z_0 и z_1 и будетъ $Z_0 = 132^\circ 56' 22'',000$, $Z_1 = 139^\circ 4' 13'',53$.

Опредѣленіе кратчайшаго разстоянія: Внеся въ урав. (40) вмѣсто u величины u_0 и u_1, получимъ $\log m_0 = -0.000000926$, $\log m_1 = -0.000000025$; послѣ чего $\log\sqrt{m_0 m_1}$ или $\frac{1}{2}\log m_0 + \frac{1}{2}\log m_1 = -0.00000048$, подставя эту величину $\log\sqrt{m_0 m_1}$ въ урав. (54), найдемъ $\log S = 5.4634866$, а слѣд. кратчайшее разстояніе между Пулковскою и Москов. обсерваторіями $S = 290727,9$ саж. или $= 581$ вер. $227,9$ саж.

—

II.

Приложеніе вычисленія вѣроятностей къ наблюденіямъ.

§ 527. Всякое наблюденіе, съ какимъ бы стараніемъ ни было производимо, всегда подвержено болѣе или менѣе погрѣшностямъ, зависящимъ отъ несовершенства нашихъ чувствъ и употребляемыхъ нами снарядовъ. Одно изъ важнѣйшихъ приложеній математической теоріи вѣроятностей состоитъ въ томъ, чтобы изъ большаго числа наблюденій, произведенныхъ надъ одною или многими неизвѣстными величинами, вывесть результаты самые надежные, или такіе, которые наименѣе подлежатъ вліянію погрѣшностей. Сверхъ того вычисленіе вѣроятностей доставляетъ намъ средства судить о степени точности этихъ результатовъ и о предѣлахъ погрѣшностей, которыя въ нихъ могутъ заключаться.

§ 528. Погрѣшности наблюденій бываютъ двоякаго рода: однѣ появляются только при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ способахъ наблюденій и находятся съ ними въ постоянной связи, а другія бываютъ при всѣхъ возможныхъ наблюденіяхъ и зависятъ отъ причинъ случайныхъ, какъ на прим. происходящія отъ несовершенства нашихъ чувствъ, отъ безпокойства изображеній наблюдаемыхъ предметовъ, отъ недовольно прочной установки инструментовъ и т. п. Въ первомъ случаѣ погрѣшности слѣдуютъ опредѣленному закону и потому навываются *правильными* или *постоянными*, а во второмъ, какъ не подлежащія никакому закону, именуются *случайными*. Разсматриваніе постоянныхъ погрѣшностей составляетъ предметъ посторонній для вычисленія вѣроятностей. Наблюдатель

долженъ узнать причины, отъ которыхъ могутъ зависѣть постоянныя погрѣшности и такъ распорядиться, чтобы или уничтожить эти погрѣшности, или опредѣлить величину ихъ вычисленіемъ. Теорія вѣроятностей принимаетъ во вниманіе преимущественно только случайныя погрѣшности, отъ которыхъ не могутъ быть освобождены наблюденія помощію прямыхъ вычисленій и вліяніе которыхъ можетъ быть ослабляемо только посредствомъ выгоднаго сочетанія наблюденій, указываемаго теоріею вѣроятностей.

§ 529. Величины всѣхъ возможныхъ погрѣшностей заключаются между $-\infty$ и $+\infty$, а потому *вѣроятность* погрѣшности, заключающейся между этими предѣлами равна 1 или *достовѣрности* (*). Вѣроятность погрѣшности лежащей между иными ближайшими предѣлами α и β должна быть менѣе единицы, и слѣд. выразиться дробью. Но если взятые ближайшіе предѣлы $-L$ и $+L$ таковы, что погрѣшность между $\pm\infty$ и $\pm L$ во все невѣроятна, то вѣроятность погрѣшности между ними можно положить также равною 1.

(*) *Математическою вѣроятностію* какого либо событія называется отношеніе числа благопріятныхъ этому событію случаевъ къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ, предполагая ихъ равно возможными. Такимъ образомъ вѣроятность выразится дробью, которой числитель есть число благопріятныхъ, а знаменатель число всѣхъ возможныхъ случаевъ. Если всѣ возможные случаи благопріятствуютъ событію, то нѣтъ никакого сомнѣнія, что оно совершится. Въ семъ случаѣ въ выраженіи вѣроятности числитель равенъ знаменателю и дробь обратится въ 1. По сей причинѣ при вычисленіи вѣроятностей *единица* принимается за выраженіе *достовѣрности*.

Объяснимъ это примѣромъ: предположимъ, что въ сосудъ положены 4 черные и 3 бѣлые шара, и вынимая одинъ наудачу, желаютъ знать какая будетъ вѣроятность, чтобы вынутый шаръ былъ бѣлый? Здѣсь всего 7 случаевъ изъ коихъ 3 благопріятствуютъ ожидаемому событію; слѣд. вѣроятность будетъ $=\frac{3}{7}$. Но еслибы въ сосудъ положены были только одни бѣлые шары, то очевидно, что не будетъ никакого сомнѣнія, что вынутый шаръ будетъ бѣлый, и потому вѣроятность въ семъ случаѣ обращается въ достовѣрность, а вышесказанная дробь, выражающая вѣроятность, въ единицу.

Такъ на прим. при измѣреніи угла со тщаніемъ вывѣреннымъ теодолитомъ во все не льзя предполагать погрѣшности въ нѣсколько минутъ, и потому за предѣлы погрѣшностей одинаково можно принимать какъ $\pm \infty$, такъ и $\pm 1^{\circ}$ и даже $\pm 1'$.

Вообще погрѣшности между нѣкоторыми данными предѣлами, могутъ принимать всѣ возможныя величины и можно допустить, что онѣ слѣдуютъ закону непрерывности; но само собою разумѣется, что разной величины погрѣшности имѣютъ различную степень вѣроятности. Очевидно, что чѣмъ ближе величина погрѣшностей подходитъ къ предѣламъ, далѣе которыхъ погрѣшности не возможны, тѣмъ менѣе будетъ вѣроятность, что мы именно такую погрѣшность сдѣлали. По сей причинѣ вѣроятность какой бы то ни было погрѣшности зависитъ отъ ея величины. Но какова бы ни дана была величина погрѣшности, вѣроятность ея будетъ всегда чрезвычайно мала, ибо весьма мало вѣроятности, чтобы погрѣшность наблюденія была ни сколько не менѣе и не болѣе данной величины; напротивъ могутъ быть даны предѣлы и вѣроятность, что погрѣшность заключена между ними, можетъ быть значительна.

§ 530. Принимая во вниманіе изложенное въ предыдущемъ §, мы можемъ вѣроятность какой нибудь погрѣшности v разсматривать какъ функцію погрѣшности. Означимъ сію функцію чрезъ φv. Еслибы стали въ нее подставлять вмѣсто v всѣ возможныя какъ положительныя, такъ и отрицательныя числа, слѣдуя закону непрерывности, а потомъ принимать ихъ за абсциссы, а соотвѣтствующія имъ величины φv за ординаты, то начертилась бы особаго рода кривая, извѣстная подъ именемъ *кривой вѣроятности.* Хотя вообще видъ сей функціи намъ неизвѣстенъ и потому не можемъ начертить эту кривую, однакоже можемъ вывесть нѣкоторыя свойства изъ значенія оной, а именно:

а.) Если предположимъ, что постоянныхъ погрѣшностей нѣтъ, и что наблюдатель старается всѣми возможными мѣрами дѣлать наблюденія точнѣе, то не имѣется ни какой причины ожидать погрѣшностей скорѣе въ одну сторону нежели въ другую, а потому въ этомъ случаѣ, (который мы исклю-

чительно и намѣрены разсматривать), положительныя и отрицательныя той же самой числовой величины погрѣшности равно вѣроятны; отсюда выходитъ первое свойство функціи φv, что $\varphi(+v) = \varphi(-v)$, выражающее, что *кривая вѣроятностей по обѣ стороны оси ординатъ расположена симетрически.*

b.) Такъ какъ наблюдатель по возможности старается достигнуть вѣрности въ наблюденіяхъ, то малыя погрѣшности гораздо чаще должны случаться, чѣмъ большія, и потому вѣроятность φv будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ погрѣшность v менѣе, а слѣд. φv имѣетъ *maximum* при $v = 0$; напротивъ съ возрастаніемъ погрѣшностей вѣроятность φv уменьшается тѣмъ быстрѣе, чѣмъ v ближе къ одному изъ данныхъ отдаленныхъ предѣловъ L погрѣшностей.

c.) Если возьмется v болѣе предѣла L погрѣшностей, то вѣроятность исчезаетъ. Но мы не сдѣлаемъ чувствительной ошибки, если примемъ, что вѣроятность при погрѣшности $= \pm L$ и далѣе, становится не нулемъ, но безконечно малою величиною, и что она продолжаетъ уменьшаться при возрастаніи v отъ $\pm L$ до $\pm\infty$. Слѣд. когда $v > \pm L$, тогда φv почти $= 0$.

§ 531. Погрѣшности, какъ замѣчено выше могутъ принимать всѣ возможныя величины между крайними своими предѣлами $\pm L$. Хотя, собственно говоря, каждой погрѣшности соотвѣтствуетъ особенная вѣроятность, однако можемъ допустить, что чрезвычайно близкія между собою погрѣшности имѣютъ равную вѣроятность. Промежутокъ, въ границахъ котораго сосѣднія между собою погрѣшности могутъ быть допущены равно вѣроятными для каждаго рода наблюденій, будетъ различенъ. Примемъ этотъ промежутокъ за весьма малую единицу. Тогда φv будетъ собственно говоря представлять вѣроятность, что погрѣшность заключается между v и $v+1$. Очевидно, что еслибы предѣлы были между собою вдвое ближе, то вѣроятность погрѣшности, заключающейся между ними была бы вдвое менѣе. Такимъ же образомъ, еслибы предѣлы были втрое ближе, то вѣроятность была бы втрое менѣе, и т. д. Слѣд. вообще вѣроятность, что погрѣш-

ность заключается между предѣлами v и $v+\mathrm{d}v$, во столько разъ будетъ менѣе φv, во сколько разъ $\mathrm{d}v$ менѣе избранной единицы, т. е. она равна произведенію φv на дробь, выражающую отношеніе $\mathrm{d}v$ къ единицѣ, или что все тоже равна $\varphi v . \mathrm{d}v$, гдѣ само собою разумѣется, что $\mathrm{d}v$ выражено въ доляхъ своей единицы. Въ отношеніи къ кривой вѣроятностей, $\varphi v . \mathrm{d}v$ выражаетъ площадь прямоугольника, коего основаніе $=\mathrm{d}v$, а высота $=\varphi v$; вѣроятность же погрѣшности между какими нибудь данными предѣлами α и β будетъ равна суммѣ площадей такого рода прямоугольниковъ между этими предѣлами, или что тоже площади, заключающейся между кривою и осью обсциссъ и ограничиваемой двумя ординатами, коихъ абсциссы суть α и β. Величина этой площади очевидно получится, если возьмется интегралъ выраженія $\varphi v . \mathrm{d}v$ между данными предѣлами, т. е. $\int_\alpha^\beta \varphi v . \mathrm{d}v$. Если же сей интегралъ возьмется между предѣлами $-\infty$ и $+\infty$, то онъ будетъ равенъ 1, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi v . \mathrm{d}v = 1.$$

Здѣсь 1 есть отвлеченное число, выражающее *достовѣрность*, ибо всякая погрѣшность заключается между $-\infty$ и $+\infty$.

Займемся теперь опредѣленіемъ вида функціи φv.

§ 532. Можемъ принять за аксіому, что *средній результатъ изъ многихъ отдѣльныхъ, независимыхъ между собою и равно хорошихъ опредѣленій какой либо величины, есть вѣроятнѣйшій* (*). Такъ на прим. если a, a', a''.... суть величины x, найденныя изъ непосредственныхъ наблюденій, число коихъ есть n, то вѣроятнѣйшая величина x, которую положимъ $= a$, будетъ

(*) Здѣсь беремъ за аксіому ту истину, которая была принимаема всѣми наблюдателями и вычислятелями древними и новѣйшими, и которая строго доказана Лапласомъ въ Théorie analytique des Probabilités.

$$a = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots . \alpha^{(n)}}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

откуда $(\alpha - a) + (\alpha' - a) + (\alpha'' - a) + \ldots . (\alpha^{(n)} - a) = 0 \ldots\ldots (2)$ гдѣ $\alpha - a$, $\alpha' - a$, $\alpha'' - a \ldots$ выразятъ систему погрѣшностей наблюденій, или собственно говоря такихъ, которыя при неизвѣстности x, имѣютъ бо̀льшую вѣроятность, нежели какія бы произошли, еслибы вмѣсто a подставили всякую иную величину. Такъ какъ вѣроятность одной погрѣшности $\alpha - x$, есть $\varphi(\alpha - x)$, то вѣроятность, что всѣ погрѣшности $\alpha - x$, $\alpha' - x$, $\alpha'' - x, \ldots$ принадлежатъ къ одному ряду наблюденій, будетъ $= \varphi(\alpha - x) . \varphi(\alpha' - x) . \varphi(\alpha'' - x) \ldots$ (*) и это произведеніе должно сдѣлаться наибольшимъ, когда вышесказанная система погрѣшностей вѣроятнѣе всякой другой; слѣд. въ этомъ случаѣ будетъ

(*) Это заключеніе выведено изъ слѣдующаго предложенія теоріи вѣроятностей: *когда событія независимы одно отъ другаго, то вѣроятность, что они случатся или вмѣстѣ, или въ данномъ опредѣленномъ порядкѣ, равна произведенію всѣхъ вѣроятностей, относящихся къ каждому отдѣльному событію.* На прим. требуется знать какая будетъ вѣроятность, чтобы бросивъ двѣ кости кубической формы, на сторонахъ коихъ означены цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6, выпало вдругъ 5 и 5 очковъ? Еслибы брошена была одна только кость, то вѣроятность, что выпадетъ 5 очковъ будетъ $= \frac{1}{6}$, ибо всего шесть случаевъ и одинъ изъ нихъ лишь благопріятный; но если бросаются двѣ кости, то каждая сторона одной кости можетъ выпасть съ каждою стороною другой, и потому будетъ 36 соединеній или случаевъ, изъ коихъ одинъ лишь благопріятствующій ожидаемому событію. Слѣд. искомая вѣроятность будетъ $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Такимъ же образомъ, еслибы бросивъ двѣ кости пожелали получить 5 и 2 очка, то принявъ во вниманіе лишь одну кость, было бы шесть случаевъ, изъ коихъ два благопріятныхъ (5 или 2 очка) и вѣроятность простая была бы $\frac{2}{6}$ или $\frac{1}{3}$; но когда сей случай произойдетъ, то вторая кость должна выпасть лишь стороною означенною 2 или 5 очками, и простая вѣроятность для сей кости будетъ $= \frac{1}{6}$; слѣд. искомая вѣроятность будетъ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$, что получили бы также изъ сравненія двухъ благопріятныхъ случаевъ при 36 возможныхъ.

$$\varphi(\alpha-x).\varphi(\alpha'-x).\varphi(\alpha''-x)\ldots\ldots=maximum.$$

На основаніи правилъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно, что это условіе выражается тѣмъ, что частный дифференціалъ относительно къ x будетъ равенъ нулю. Для удобнѣйшаго дифференцированія возьмемъ неперовъ логариѳмъ выведеннаго нами выраженія и означивъ для сокращенія $\log.\varphi(\alpha-x)$, $\log\varphi(\alpha'-x)\ldots$ чрезъ $\psi(\alpha-x)$, $\psi(\alpha'-x)\ldots$, получимъ,

$$\psi(\alpha-x)+\psi(\alpha'-x)+\psi(\alpha''-x)\ldots\ldots=maximum.$$

Дифференцированіе сего уравненія даетъ

$$\frac{d.\psi(\alpha-x)}{dx}+\frac{d.\psi(\alpha'-x)}{dx}+\frac{d\psi(\alpha''-x)}{dx}+\text{и проч.}=0..(A)$$

$$\text{или } (\alpha-x).\frac{d\psi(\alpha-x)}{(\alpha-x).dx}+(\alpha'-x)\frac{d\psi(\alpha'-x)}{(\alpha'-x).dx}+\text{и проч.}=0$$

Очевидно, что урав. (2), т. е. $(\alpha-x)+(\alpha'-x)+(\alpha''-x)+..=0$, основывающееся на среднемъ ариѳметическомъ, можетъ въ томъ только случаѣ удовлетворять выведенному нами теперь уравненію, когда

$$\frac{d.\psi(\alpha-x)}{(\alpha-x).dx}=\frac{d.\psi(\alpha'-x)}{(\alpha'-x).dx}=\frac{d.\psi(\alpha''-x)}{(\alpha''-x).dx}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или что все равно, когда эти выраженія независимы отъ величины погрѣшностей $(\alpha-x)$, $(\alpha'-x)$, $(\alpha''-x)$,.... И такъ, означивъ сіи погрѣшности чрезъ v, v', $v''\ldots$, положимъ $\frac{d.\psi v}{v.dv}$, $\frac{d.\psi v'}{v'.dv'}\ldots$ равными одному и тому же постоянному количеству, которое изобразимъ чрезъ k, т. е.

$$\frac{d.\psi v}{v.dv}=k, \text{ откуда } d.\psi v=kv.dv\ (*),$$

(*) Выводъ этого результата, служащаго основнымъ уравненіемъ всей послѣдующей теоріи, предложенъ астрономомъ Энке; Гауссъ же доказываетъ его въ своей Theoria motus etc, слѣдующимъ образомъ:

Означивъ для сокращенія дифференціалъ непероваго логариѳма функціи φv, т. е. $\frac{d(\varphi v)}{\varphi v.dv}$ чрезъ $\varphi' v$, вышенайденное урав. (A), по подстановкѣ вѣроятнѣйшей величины a вмѣсто x, обратится въ

$$\varphi'(\alpha-a)+\varphi'(\alpha'-a)+\varphi'(\alpha''-a)+\ldots\ldots=0$$

чего интегралъ есть

$$\psi v \text{ или } \log \varphi v = \tfrac{1}{2} k v^2 + c,$$

гдѣ c выражаетъ постоянное количество входящее при интегрированіи.

Если означимъ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ чрезъ e, то это урав. обратится въ

$$\varphi v = e^{\frac{1}{2} k v^2 + c} = e^c . e^{\frac{1}{2} k v^2},$$

или положивъ постоянное $e^c = \lambda$, будетъ

$$\varphi v = \lambda e^{\frac{1}{2} k v^2}.$$

Но какъ по условію, при уменьшеніи погрѣшности функція φv должна увеличиваться и на оборотъ, то постоянное k должно быть количествомъ отрицательнымъ. Въ слѣдствіе чего, положивъ $\frac{1}{2} k = -h^2$, получимъ

$$\varphi v = \lambda e^{-h^2 v^2} \text{ и } \varphi v . \mathrm{d}v = \lambda e^{-h^2 v^2} . \mathrm{d}v \ldots\ldots (3),$$

Такъ какъ это урав. справедливо, каковы бы ни были частныя числовыя значенія количества α, α', $\alpha''\ldots$, то можемъ предположить, что $\alpha' = \alpha'' = \ldots = \alpha - n\mathrm{N}$, гдѣ N есть нѣкоторая величина выраженная въ такихъ же единицахъ какъ α. Тогда будетъ

$$a = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots}{n} = \frac{\alpha + (n-1)(\alpha - n\mathrm{N})}{n} = \alpha - (n-1)\mathrm{N},$$

откуда $\alpha - a = (n-1)\mathrm{N}$

и $\alpha' - a = \alpha'' - a = \ldots = \alpha - n\mathrm{N} - a = -\mathrm{N}.$

Послѣ чего изъ уравненія

$$\varphi'(\alpha - a) = -\left\{\varphi'(\alpha' - a) + \varphi'(\alpha'' - a) + \ldots\ldots\right\};$$

по причинѣ $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' \ldots$, получимъ

$$\varphi'(\alpha - a) = -(n-1)\varphi'(\alpha' - a)$$

или $\varphi'((n-1)\mathrm{N}) = -(n-1)\varphi'(-\mathrm{N}).$

Но какъ по условію n можетъ означать всякое положительное число, то это урав. не иначе будетъ справедливымъ, какъ принявъ что функція $\varphi' x = kx$, гдѣ k долженъ быть постояннымъ коефиціентомъ. И такъ, находимъ что $\frac{\varphi' v}{v} = \frac{\mathrm{d}(\varphi v)}{v . \varphi v . \mathrm{d}v} = k$, откуда

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi v)}{\varphi v} \text{ или } \mathrm{d}.\log(\varphi v) = k v . \mathrm{d}v.$$

Остается опредѣлить величину постоянныхъ λ и h.

Такъ какъ выше выведено нами было (см. § 531), что $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi v.\mathrm{d}v=1$, то подставя вмѣсто $\varphi v.\mathrm{d}v$ величину изъ урав. (3), будетъ

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2v^2}.\mathrm{d}v=1,$$

или приравнявъ произведеніе hv перемѣнному количеству t, $hv=t$, $\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}t}{h}$, получимъ

$$\frac{\lambda}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}.\mathrm{d}t=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Но изъ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ извѣстно (см. Berl. astr. Jahrbuch, 1834, стр. 267), что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}.\mathrm{d}t=\sqrt{\pi},$$

гдѣ π есть отношеніе окружности къ діаметру; слѣд. урав. (4) обращается въ

$$\frac{\lambda}{h}\sqrt{\pi}=1,\ \text{откуда}\ \frac{\lambda}{h}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \text{и}\ \lambda=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\ldots\ldots\ldots(5).$$

Подставя эту величину въ урав. (4), получимъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}.\mathrm{d}t\ \text{или}\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{t^2}.\mathrm{d}t=1\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

Такимъ же образомъ, если въ выраженіи $\int_{\beta}^{\alpha}\varphi v.\mathrm{d}v$ (см. стр. 240) представляющемъ вѣроятность, что погрѣшность заключается между предѣлами β и α, вмѣсто φv внесемъ величину, выражаемую уравненіемъ (3), то получимъ

$$\int_{\beta}^{\alpha}\varphi v.\mathrm{d}v=\lambda\int_{\beta}^{\alpha}e^{-h^2v^2}.\mathrm{d}v\ \text{или}\ =\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\beta}^{\alpha}e^{-t^2}.\mathrm{d}t.$$

Если теперь данные предѣлы β и α примемъ между собою равными, но противоположными, т. е. $+\beta=-\alpha$, то по причинѣ четной степени показателя t, интегралъ отъ 0 до $+\alpha$ будетъ равенъ интегралу отъ 0 до $-\alpha$, и потому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-t^2}.\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\alpha} e^{-t^2}.\mathrm{d}t.$$

Этотъ интегралъ будучи разложенъ въ рядъ по возрастающимъ степенямъ количества t (*) даетъ намъ возможность составить таблицу его величинъ соотвѣтствующихъ для t, начиная отъ 0 до произвольнаго предѣла. Подобная таблица помѣщена у Энке въ Berl. astron. Jahrbuch 1834. Считаемъ полезнымъ приложить здѣсь извлеченіе изъ ней бравъ t не въ сотыхъ доляхъ, какъ у Энке, но только отъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{1}{10}$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-t^2}.\mathrm{d}t = \theta(t)$$

t	$\theta(t)$	t	$\theta(t)$	t	$\theta(t)$	t	$\theta(t)$
0,0	0,0000000	0,5	0,5204990	1,0	0,8427008	1,5	0,9661052
0,1	0,1124650	0,6	0,6038561	1,1	0,8802050	1,6	0,9763484
0,2	0,2227025	0,7	0,6778010	1,2	0,9103140	1,7	0,9837904
0,3	0,3286267	0,8	0,7421010	1,3	0,9340080	1,8	0,9890905
0,4	0,4283922	0,9	0,7969082	1,4	0,9522851	1,9	0,9927904
						2,0	0,9953223

Эта таблица показываетъ съ какою быстротою убываетъ число погрѣшностей между равными промежутками при увеличиваніи величины t, и почему именно позволительно брать предѣлами $-\infty$ и $+\infty$, вмѣсто истинныхъ ближайшихъ, которые въ точности опредѣлены быть не могутъ. Въ 1000 наблюденій

(*) Рядъ, о которомъ здѣсь упоминается выведенъ Лапласомъ (см. Méc. cel. T. IV, p. 253):

$$\int_0^t e^{-t^2}.\mathrm{d}t = t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{t^9}{9} - \ldots\ldots\ldots$$

Если же $t > 1$, тогда искомый интегралъ вычисляется посредствомъ слѣдующаго:

$$\int_0^T e^{-t^2}.\mathrm{d}t = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \frac{1.3.5.7}{2^4.T^8} - \ldots\ldots\ldots\right\}$$

отъ	$t = 0$ до $t = 0{,}5$	находится	520	погрѣшностей
»	$t = 0{,}5$ » $t = 1{,}0$	»	323	»
»	$t = 1{,}0$ » $t = 1{,}5$	»	123	»
»	$t = 1{,}5$ » $t = 2{,}0$	»	29	»

и отъ сего послѣдняго предѣла до $t = \infty$ всего только 5 погрѣшностей.

533. Положимъ, что въ какомъ нибудь ряду, наблюденій найдены ихъ погрѣшности и между ними взята такая, въ сравненіи съ которою встрѣчается столько же погрѣшностей бо̀льшихъ, сколько меньшихъ, при чемъ не обращается вниманія на знакъ. Эта погрѣшность называется *вѣроятнѣйшею погрѣшностію.* (*) Изъ этого значенія вѣроятнѣйшей погрѣшности слѣдуетъ, что если изъ ряда равнохорошихъ наблюденій, возьмемъ на удачу како̀е либо одно, то вѣроятность, что

(*) Пояснимъ это примѣромъ: Если предположимъ, что разстояніе между двумя точками, взятыми на поверхности земли, измѣрено не вполнѣ точнымъ орудіемъ, на прим. цѣпью, то съ какимъ бы тщаніемъ эти измѣренія ни исполняли, результаты ихъ, при значительной длинѣ линіи, могутъ разногласить между собою не только въ дюймахъ, но и во многихъ футахъ. Если положимъ далѣе, что таже самая линія измѣрена была потомъ базиснымъ снарядомъ, то результатъ этого дѣйствія сравнительно съ результатами доставленными цѣпью, можно будетъ принять за математически точный, и потому разности между онымъ и каждымъ изъ сихъ послѣднихъ выразитъ *истинныя погрѣшности* измѣреній. Написавъ эти погрѣшности *не обращая вниманія на стоящіе предъ ними знаки* въ рядъ по возрастающимъ ихъ величинамъ, можно будетъ сосчитать, сколько сдѣлано было погрѣшностей менѣе $\frac{1}{2}$ дюйма, сколько заключается между $\frac{1}{2}$ и 1 дюймомъ, сколько между 1 и $1\frac{1}{2}$ и т. д. Пусть число всѣхъ погрѣшностей будетъ $= 100$, и положимъ, что первая ихъ половина, т. е. 50 погрѣшностей менѣе 6 дюймовъ, а остальныя 50 погрѣшностей болѣе 6 дюймовъ: въ семъ случаѣ *вѣроятнѣйшая погрѣшность* этого ряда наблюденій будетъ $= 6$ дюйм.

При семъ необходимо замѣтить, что французскіе геометры вѣроятнѣйшую погрѣшность называютъ *среднею* (l'erreur moyenne à craindre) между тѣмъ, германскіе ученые подъ именемъ *средней погрѣшности* разумѣютъ совершенную иную величину, какъ это увидимъ въ послѣдствіи.

погрѣшность этого отдѣльнаго наблюденія не превышаетъ вѣроятнѣйшей погрѣшности и не менѣе оной, равна будетъ $\frac{1}{2}$, ибо если означимъ число всѣхъ погрѣшностей чрезъ n, то число погрѣшностей какъ менѣе вѣроятнѣйшей, такъ и болѣе оной будетъ $\frac{1}{2}n$, а слѣд. требуемая вѣроятность (см. прим. на стр. 237) выразится чрезъ $\frac{1}{2}n : n$ или $= \frac{1}{2}$.

Принимая во вниманіе, что численныя величины интеграловъ $\theta(t)$, предложенные въ таблицѣ предшествующаго §, представляютъ вѣроятности соотвѣтственно различнымъ величинамъ t, и что t по условію $= hv$, гдѣ h есть постоянное количество, а v погрѣшность наблюденія, заключаемъ, что если посредствомъ интерполированія найдемъ изъ чиселъ таблицы такую величину t, при коей интегралъ t равняется $\frac{1}{2}$, то погрѣшность v соотвѣтствующая t въ урав. $t=hv$ будетъ вѣроятнѣйшая погрѣшность. Исполнивъ вышесказанное интерполированіе, найдемъ $t=0,476936$. По частому употребленію этого числа, станемъ впредь его означать чрезъ ϱ, а вѣроятнѣйшую погрѣшность чрезъ r, т. е.

$$\varrho=0,476936,\ \varrho=hr,\ \text{откуда}\ h=\frac{\varrho}{r}$$

§ 534. Изъ самаго значенія вѣроятнѣйшей погрѣшности, слѣдуетъ, что изъ многихъ рядовъ наблюденій сдѣланныхъ надъ одною и тою же величиною, тотъ будетъ точнѣе, въ которомъ вѣроятнѣйшая погрѣшность будетъ менѣе. Но какъ изъ уравненія $\varrho=hr$ видимъ, что чѣмъ r менѣе, тѣмъ h будетъ болѣе, и обратно, то количество h, которое для каждаго ряда наблюденій остается постояннымъ, слѣдуя Гауссу, называется *мѣрою точности*. Далѣе видимъ, что если возьмемъ двѣ системы погрѣшностей, которыхъ вѣроятнѣйшія погрѣшности суть r и r', а мѣры точности суть h и h', то изъ уравненій $\varrho=hr$ и $\varrho=h'r'$, получимъ

$$h : h' = r' : r.$$

т. е. что *точности двухъ рядовъ наблюденій находятся въ обратномъ содержаніи съ ихъ вѣроятными погрѣшностями.*

§ 535. Въ различныхъ системахъ наблюденій, вѣроятность, что погрѣшности наблюденій заключаются между одни-

ми и тѣми же предѣлами, будетъ не одинакова, ибо хотя видъ функціи выражающей эту вѣроятность остается одинъ и тотъ же, однако постоянныя въ нее входящія, будутъ различны, потому что зависятъ отъ свойства системы. Равнымъ образомъ одна и таже вѣроятность соотвѣтствуетъ погрѣшностямъ въ различныхъ системахъ между совершенно иными предѣлами. Такъ на прим. зная, что измѣреніе угла теодолитомъ точнѣе нежели секстантомъ и что наблюденіе симъ послѣднимъ приводитъ къ погрѣшности въ $12''$, столь же легко какъ теодолитомъ въ $3''$, заключаемъ, что обѣ эти погрѣшности для соотвѣтствующихъ имъ рядовъ наблюденій имѣютъ одинаковое значеніе. Такимъ образомъ, вѣроятность, что погрѣшность при наблюденіи секстантомъ заключается между предѣлами $6''$ и $6''+4\omega$ будетъ одинакова съ вѣроятностью, что погрѣшность при наблюденіи теодолитомъ заключается между предѣлами $1'',5$ и $1'',5+\omega$. По сей причинѣ, еслибы пожелали имѣть такіе промежутки, которые соотвѣтствуютъ одинакимъ вѣроятностямъ, то надлежало бы выразить ихъ въ единицахъ принадлежащихъ отдѣльно каждой системѣ. За эту единицу всего удобнѣе принять величину вѣроятнѣйшей погрѣшности. Если данныя погрѣшности означимъ чрезъ v, v', v''......, а вѣроятнѣйшую погрѣшность этой системы чрезъ r, и если v_1, v_1', v_1'',.... и r_1 имѣютъ тѣже значенія для другой системы, то раздѣливъ каждый рядъ на свою соотвѣтствующую вѣроятнѣйшую погрѣшность, частныя отъ сего дѣленія, т. е. $\frac{v}{r}$, $\frac{v'}{r}$, $\frac{v''}{r}$,.... и $\frac{v_1}{r_1}$, $\frac{v_1'}{r_1}$, $\frac{v_1''}{r_1}$,.... выразятъ такія погрѣшности, что равнымъ промежуткамъ будутъ соотвѣтствовать одинаковыя вѣроятности. Назовемъ такого рода погрѣшности *относительными погрѣшностями* и означимъ ихъ чрезъ s, s', s''.... т. е. $v=rs$, $v'=rs'$, $v''=rs''$.... Изъ вышесказаннаго явствуетъ что $\varphi v.\mathrm{d}v=\varphi s.\mathrm{d}s$; послѣ чего урав.

$$\varphi v.\mathrm{d}v=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2v^2}.\mathrm{d}v,$$

отъ положенія $hv=hrs=\varrho s$ и $\mathrm{d}v=\frac{\varrho}{r}\mathrm{d}s$, обратится въ

$$\varphi s . ds = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 s^2} . ds;$$

а слѣд. $$\int_0^s \varphi s . ds = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\varrho^2 s^2} . ds = \theta(s)$$

выразитъ величину вѣроятности, что относительная погрѣшность заключается между 0 и s. Въ Berlin. astr. Jahrbuch 1834, помѣщена таблица этихъ интеграловъ при аргументѣ s отъ 0,01 до 0,01. Здѣсь предлагаемъ извлеченіе изъ ней отъ 0,1 до 0,1.

s	$\theta(s)$	s	$\theta(s)$	s	$\theta(s)$	s	$\theta(s)$	s	$\theta(s)$
0,0	0,00000	1,1	0,54188	2,1	0,84335	3,1	0,96346	4,1	0,99431
0,1	0,05376	1,2	0,58171	2,2	0,84216	3,2	0,96910	4,2	0,99539
0,2	0,10731	1,3	0,61942	2,3	0,87918	3,3	0,97397	4,3	0,99627
0,3	0,16035	1,4	0,65498	2,4	0,89450	3,4	0,97817	4,4	0,99700
0,4	0,21268	1,5	0,68833	2,5	0,90825	3,5	0,98176	4,5	0,99760
0,5	0,26407	1,6	0,71949	2,6	0,92051	3,6	0,98482	4,6	0,99808
0,6	0,31430	1,7	0,74847	2,7	0,93141	3,7	0,98743	4,7	0,99848
0,7	0,36317	1,8	0,77528	2,8	0,94105	3,8	0,98962	4,8	0,99879
0,8	0,41052	1,9	0,79999	2,9	9,94954	3,9	0,99147	4,9	0,99905
0,9	0,45618	2,0	0,82266	3,0	0,95698	4,0	0,99302	5,0	0,99926
1,0	0,50000								

Не должно выпускать изъ виду, что числа этой таблицы выражаютъ, при вѣроятной погрѣшности равной *единицѣ*, величину вѣроятности, что погрѣшность случится между 0 и s (не обращая вниманія на стоящій предъ нею знакъ). Но если при вѣроятной погрѣшности $= r$, требуется знать какъ велика вѣроятность, что погрѣшность случится между 0 и какою нибудь данною величиною v, то достаточно было бы v раздѣлить на r, и принявъ частное равнымъ s, $s = \frac{v}{r}$, взять изъ таблицы число $\theta(s)$, соотвѣтствующее этому частному. Такъ на прим. если $r = 3''$, $v = 2'',1$, то будетъ $s = \frac{2'',1}{3} = 0,7$;

послѣ чего искомая величина вѣроятности, какъ показываетъ таблица будетъ 0,36317, или почти $0,36=\frac{9}{25}$. И такъ, при вѣроятной погрѣшности $=3''$, можно биться о закладъ 9 противъ $25-9=16$, что погрѣшность случится менѣе $\pm 2'',1$.

Сверхъ того должно замѣтить, что вышепредложенная таблица доставляетъ возможность по данному числу всѣхъ погрѣшностей наблюденій опредѣлять à priori, сколько именно изъ нихъ по вѣроятности должно заключаться между нулемъ и даннымъ предѣломъ s, (не принимая какъ и прежде во вниманіе знаковъ предъ ними). И дѣйствительно, если данное число всѣхъ погрѣшностей есть n, а искомое число погрѣшностей заключающихся между 0 и s означимъ чрезъ x, то $\frac{x}{n}$ выразитъ вѣроятность $\theta(s)$, что погрѣшность случится между 0 и s; отсюда $x=n.\theta(s)$. Такимъ же образомъ, если $\theta(s)$ и $\theta(s')$ суть два числа таблицы, соотвѣтствующія s и s', то $n(\theta(s)-\theta(s'))$ выразитъ число погрѣшностей заключающихся между предѣлами s и s'.

Это опредѣленіе числа погрѣшностей, могущихъ произойдти между данными предѣлами вполнѣ оправдывается опытомъ всякій разъ, когда наблюденія произведены тщательно. Возьмемъ для примѣра градусное измѣреніе Г. Струве въ Ост-Зейскихъ провинціяхъ: погрѣшность суммы трехъ угловъ оказалась

между $0''$ и $1''$ въ 21 треугольникахъ,
» 1 и $2''$ въ 8 »
» 2 и $3''$ въ 2 »

а вѣроятная ихъ погрѣшность была $0'',668$. Требуется знать, сколько по теоріи вѣроятностей, должно быть треугольниковъ имѣющихъ погрѣшности между тѣми же самыми предѣлами, когда число всѣхъ треугольниковъ есть 31. Имѣемъ

v	$=0''$;	$1''$;	$2''$;	$3''$
$s=\frac{v}{r}$	$=0$;	1,5;	3,0;	4,5
$\theta(s)$	$=0{,}000$;	0,668;	0,957;	0,998
$31.\theta(s)$	$=0{,}00$;	21,32;	29,67;	30,94
разности $=$	21,32;	8,35;	1,27.	

Числа послѣдней строки выражаютъ сколько по теоріи вѣроятностей должно быть треугольниковъ между предѣлами 0″ и 1″, 1″ и 2″, 2″ и 3″; согласіе ихъ съ найденными изъ наблюденій удостовѣряютъ въ строгой точности сихъ послѣднихъ.

§ 536. Еслибы въ нѣкоторомъ опредѣленномъ случаѣ были извѣстны дѣйствительныя погрѣшности, тогда можно было бы спросить, какая будетъ мѣра точности этихъ наблюденій, или сколь велико должно быть число h, соотвѣтствующее такимъ наблюденіямъ. Для рѣшенія этого вопроса, должно сперва взять выраженіе общей вѣроятности совокупнаго существованія данныхъ погрѣшностей и найти h изъ условія, что эта вѣроятность есть наибольшая.

Но уже намъ извѣстно, что уравненія

$$\varphi v = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2},\ \varphi v' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v'^2},\ \varphi v'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v''^2}, \ldots.$$

выражаютъ вѣроятности, что погрѣшности суть $v, v', v''\ldots$ Если число ихъ означимъ чрезъ n, то вѣроятность W, что онѣ случатся разомъ выразится чрезъ (см. стр. 241)

$$W = \varphi v . \varphi v' . \varphi v'' \ldots..$$

или

$$W = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2[v^2]}$$

гдѣ $[v^2]$ означаетъ сумму квадратовъ всѣхъ погрѣшностей, $[v^2] = v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots\ldots v^{(n)2}$.

Для опредѣленія величины h, сходно съ сказаннымъ выше, при коей выраженіе W обращается въ величину наибольшую (maximum), одифференцируемъ W въ разсужденіи h, и приравняемъ результатъ нулю, $\frac{dW}{dh} = 0$. Получимъ

$$\frac{dW}{dh} = \frac{nh^{n-1} . e^{-h^2[v^2]}}{\sqrt{\pi^n}} - \frac{2h^{n+1} . e^{-h^2[v^2]} . [v^2]}{\sqrt{\pi^n}} = 0,$$

или по сокращеніи

$$n - 2h^2[v^2] = 0, \text{ откуда } h = \sqrt{\frac{n}{2[v^2]}}.$$

Но $h=\frac{\varrho}{r}$, гдѣ ϱ=0,476936, а r есть вѣроятнѣйшая погрѣшность; слѣд.

$$\frac{\varrho}{r}=\sqrt{\frac{n}{2[v^2]}},\quad r=\varrho\sqrt{\frac{2[v^2]}{n}},$$

или положивъ $\sqrt{\frac{[v^2]}{n}}=\varepsilon$, будетъ

$$r=\varrho\sqrt{2}.\varepsilon=k\varepsilon,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

означая чрезъ k постоянный множитель $\varrho\sqrt{2}$,
$k=0{,}476936\sqrt{2}=0{,}6744894$, $\log k=\bar{1}.8289753$.

Количество ε, выражающее *квадратный корень изъ суммы квадратовъ всѣхъ дѣйствительныхъ погрѣшностей, раздѣленной на число всѣхъ наблюденій,* называется *среднею погрѣшностію.*

Отсюда видимъ, что *вѣроятная погрѣшность* получится, если *среднюю погрѣшность умножимъ на постоянное количество* k=0,6744894, т. е.

$$r=0{,}6744894.\varepsilon \text{ или } =0{,}6744894\sqrt{\frac{[v^2]}{n}}\ldots\ldots(8).$$

§ 537. Весьма часто встрѣчается въ практикѣ, что опредѣляемая величина x зависитъ отъ многихъ другихъ величинъ a, a'...., которыя непосредственно выводятся изъ наблюденій, и такъ какъ каждая изъ сихъ послѣднихъ имѣетъ свою вѣроятную погрѣшность, то раждается вопросъ, какая будетъ вѣроят. погрѣшность результата. Положимъ, на прим. что

$$x=\mathrm{A}a+\mathrm{B}a'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

и что $\pm r$ и $\pm r'$ суть вѣроятныя погрѣшности измѣренныхъ величинъ a и a'. Еслибы извѣстно было бы à priori какіе именно знаки должны находиться предъ r и r', то достаточно было бы подставить $a\pm r$ и $a'\pm r'$ вмѣсто a и a' въ урав. (α), и получилась бы для искомой вѣроят. погрѣшности R количество x только одна величина. Но какъ мы не знаемъ съ какими знаками r и r' должны входить въ урав., то произойдутъ слѣдующія четыре величины одинаково вѣроятныя:

$$\pm(\mathrm{A}r+\mathrm{B}r') \text{ и } \pm(\mathrm{A}r-\mathrm{B}r').$$

Чтобы избавиться отъ знаковъ и имѣть лишь числовую величину искомой погрѣшности, возвысимъ найденныя нами выраженія во 2-ю степень и получимъ:

$$A^2r^2+B^2r'^2+2ABrr',$$

и

$$A^2r^2+B^2r'^2-2ABrr'.$$

Каждое изъ этихъ двухъ количествъ выражаетъ квадратъ вѣроятнѣйшей погрѣшности величины x, и какъ одно изъ нихъ столь же вѣроятно какъ другое, то за вѣроятнѣйшую величину квадрата должно принять полусумму равновѣроятныхъ его величинъ, т. е. $A^2r^2+B^2r'^2$, а слѣд. вѣроятная величина погрѣшности въ опредѣленіи $x=Aa+Ba'$, будетъ

$$R=\pm\sqrt{A^2r^2+B^2r'^2}\,..........(9)\ (*)$$

Отсюда легко можемъ вывесть слѣдующія заключенія:

1-е) Такъ какъ данные коефиціенты A и B входятъ въ урав. (9) во 2-й степени, то очевидно, что выраженіе R не измѣнится когда вмѣсто урав. (α), дано будетъ $x=\pm(Aa-Ba')$, (т. е. когда оба эти коефиціента или одинъ изъ нихъ входятъ въ x со знакомъ —),

2-е) Еслибы вмѣсто даннаго уравненія дано было

$$x=a+a',$$

то для опредѣленія вѣроят. погрѣшности R величины x, достаточно въ урав. (9) положить $A=B=1$, и получимъ

$$R=\pm\sqrt{r^2+r'^2}\,.............(10)$$

3-е) Когда опредѣляемое количество x равняется суммѣ не двухъ, но многихъ величинъ a, a', a''...., т. е.

(*) Могутъ возразить, что подобнымъ образомъ можно было бы заключить, что вѣроятная погрѣшность въ $x=Aa+Ba'$ есть $\sqrt[4]{(A^4r^4+B^4r^4)}$; но достаточно замѣтить, что настоящая величина погрѣшности долженствовала бы равняться или $\pm(Ar\pm Br')$ или $\pm(Ar-Br')$, и что выраженіе $\pm\sqrt{A^2r^2+B^2r^2}$ ближе къ каждому изъ сихъ количествъ нежели $\sqrt[4]{(A^4r^4+B^4r'^4)}$, а потому оно скорѣе можетъ быть принято за выраженіе искомой вѣроятной погрѣшности въ x. Тоже можно замѣтить и о прочихъ высшихъ четныхъ степеняхъ.

$$x = a + a' + a'' + \ldots\ldots a^{(n)},$$

которыхъ вѣроятныя погрѣшности суть $r, r', r'' \ldots r^{(n)}$, тогда вѣроятная погрѣшность результата x будетъ

$$R = \pm\sqrt{r^2 + r'^2 + r''^2 + \ldots r^{(n)}} \ldots\ldots (11)\ (*)$$

Справедливость этого заключенія явствуетъ изъ того, что еслибы взяли сперва сумму первыхъ двухъ данныхъ величинъ a и a', то ея вѣроятнѣйшая погрѣшность была бы $= \sqrt{r^2 + r'^2} = r_1$. Положивъ сумму $a + a' = \alpha$ и присоединивъ къ ней a'', такимъ же образомъ нашли бы для $\alpha + a''$ вѣроятную погрѣшность $\sqrt{r^2{}_1 + r''^2}$ или $\sqrt{r^2 + r'^2 + r''^2}$, и т. д.

4-е) Если въ уравненіи

$$x = a + a' + a'' + \ldots\ldots\ldots a^{(n)}$$

количества $a, a', a'' \ldots$ найдены были съ одинаковою вѣроятною погрѣшностію r, то для опредѣленія вѣроятной погрѣшности R величины x, достаточно въ урав. (11) положить $r = r' = r'' = \ldots$ и получимъ

$$R = r\sqrt{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Такимъ образомъ, если каждый изъ 3-хъ угловъ треуг-ка измѣренъ съ одинаковою вѣроят. погрѣшностію r, то вѣроятная погрѣшность суммы оныхъ будетъ $R = r\sqrt{3}$.

5-е) Если при опредѣленіи количества x, наблюденія дали различныя величины $a, a', a'' \ldots a^{(n)}$ съ вѣроятною погрѣшностью r, то въ слѣдствіе вышеизложеннаго для суммы оныхъ, которую мы означимъ чрезъ $S = a + a' + a'' + \ldots a^{(n)}$, вѣроятная погрѣшность будетъ $= r\sqrt{n}$; но какъ среднее ариѳметическое этихъ опредѣленій есть $x = \frac{S}{n}$, то вѣроят. погрѣшность R сей величины, будетъ

$$R = \frac{1}{n} r\sqrt{n} = \frac{r}{\sqrt{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

И такъ, *вѣроятная погрѣшность* R *средней ариѳметической*

(*) Посредствомъ этого уравненія, очевидно опредѣлится вѣроят. погрѣшность длины линіи, которая измѣрена была по частямъ и съ различною мѣрою точности.

изъ многихъ опредѣленій одинаковой точности, равняется вѣроятной погрѣшности отдѣльнаго опредѣленія, раздѣленной на квадратный корень изъ числа n наблюденій

§ 538. Говоря объ опредѣленіи вѣроятнѣйшей погрѣшности какого либо ряда наблюденій посредствомъ средней, мы предполагали, что дѣйствительныя погрѣшности $v, v', v''\ldots$ этихъ наблюденій извѣстны. Но какъ въ практикѣ, никогда не можетъ этого случиться, и даже не имѣется возможности опредѣлить таковыя погрѣшности, то разсмотримъ какимъ образомъ можно найдти наиболѣе вѣроятную величину средней погрѣшности изъ самыхъ наблюденій.

Предположимъ, что при опредѣленіи x, наблюденія дали величины $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots\alpha^{(n)}$, т. е.

$$x=\alpha,\ x=\alpha',\ x=\alpha''\ldots\ldots x=\alpha^{(n)}.$$

Не зная въ точности дѣйствительной величины x, мы довольствуемся ихъ ариѳм. срединою, которую положимъ $=a$,

$$a=\frac{[\alpha]}{n}.$$

Подставя сію величину a вмѣсто x въ условныя уравненія, разности $a-\alpha, a-\alpha', a-\alpha''\ldots$ выразятъ погрѣшности наблюденій, кои мы принимаемъ наиболѣе вѣроятными. Означимъ сіи погрѣшности чрезъ $\delta, \delta', \delta''\ldots$, т. е.

$$a-\alpha=\delta,\ a-\alpha'=\delta',\ a-\alpha''=\delta''\ldots$$

Но какъ a есть вѣроятнѣйшая, а не дѣйствительная величина количества x, то положимъ, что принимая x равнымъ a, мы дѣлаемъ погрѣшность Δa, $x=a+\Delta a$. Подставляя сію дѣйствительную величину количества x въ условныя уравненія, получимъ для величины дѣйствительныхъ погрѣшностей, которыя мы означимъ чрезъ $v, v', v''\ldots$, слѣдующія выраженія:

$$a+\Delta a-\alpha=v,\ a+\Delta a-\alpha'=v',\ a+\Delta a-\alpha''=v''\ldots$$

или

$$\delta+\Delta a=v,$$
$$\delta'+\Delta a=v',$$
$$\delta''+\Delta a=v'', \text{ и т. д.}$$

Взявъ сумму квадратовъ этихъ уравненій, и не забывая (см. урав. 2), что $[\delta]=0$, будетъ

$$[\delta^2] + n(\Delta a)^2 = [v^2] \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Отсюда видимъ, что принимая $[\delta^2]$ за истинную сумму квадратовъ погрѣшностей, мы ошибаемся положительною величиною $n(\Delta a)^2$, и потому еслибы стали изъ $[\delta^2]$ прямо выводить среднюю погрѣшность, то она была бы менѣе искомой. Но еслибы мы ее знали, или предположили, что дѣйствительная ея величина есть ε, то ε по вѣроятности была бы среднею погрѣшностію какого нибудь отдѣльнаго наблюденія, и слѣд. средняя погрѣшность ариѳм. средины a, въ слѣдствіе предыдущаго §, была бы $= \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Изъ чего заключаемъ, что мы можемъ съ вѣроятностію принять Δa, выражающее поправку для ариѳм. средины a, за величину $= \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, или $(\Delta a)^2 = \frac{\varepsilon^2}{n}$, чрезъ что урав. (β) обратится въ

$$[\delta^2] + \varepsilon^2 = [v^2]$$

или

$$[\delta^2] = [v^2] - \varepsilon^2;$$

но въ слѣдствіе значенія средней погрѣшности (см. стр. 252), имѣемъ

$$\varepsilon^2 = \frac{[v^2]}{n} \text{ или } [v^2] = n\varepsilon^2,$$

а посему

$$[\delta^2] = n\varepsilon^2 - \varepsilon^2 = (n-1)\varepsilon^2$$

откуда

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Послѣ чего величина вѣроят. погрѣшности (см. урав. 7 и 8), будетъ

$$r = k\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} \text{ или } = 0{,}6745\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} \ldots (15)$$

а вѣроят. погрѣш. ариѳметической средины a, по урав. (13) будетъ

$$R = 0{,}6745\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n.(n-1)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

И такъ, когда сдѣланъ рядъ равнохорошихъ и независимыхъ

другъ отъ друга наблюденій, то для опредѣленія средней погрѣшности этого ряда, надлежитъ каждое опредѣленіе вычесть изъ ариѳметической средины, и изъ суммы квадратовъ этихъ разностей, раздѣленной на число наблюденій безъ единицы, извлечь квадратный корень. Умноживъ этотъ результатъ на 0,6745, произведеніе выразитъ вѣроятную погрѣшность каждаго отдѣльнаго опредѣленія, а раздѣливъ это произведеніе на $\sqrt{n}$, частное будетъ равно вѣроят. погрѣшности ариѳметической средины.

На прим. при опредѣленіи секстантомъ высоты полюса Дерпта, найдены были слѣдующія величины:

$\varphi=58°22'31'',7$	$\delta=15'',6,$	$\delta^2=243'',4$
44,8	2,5	6,2
55,8	7,1	50,4
45,6	1,7	2,9
56,3	9,0	81,0
54,4	7,1	50,4
54,7	7,4	54,8
41,2	6,1	37,2
42,8	4,5	22,3
49,9	2,6	6,8
42,3	5,0	25,8
ариѳ. сред$=58°22'47'',3$		$[\delta^2]=580,4$

средняя погрѣш. $\varepsilon=\sqrt{\frac{580'',4}{11-1}}=\sqrt{58'',04}=7'',62,$

вѣр. погр. $r=0,6745\times 7'',62=5'',14$ для одного наблюденія;

вѣр. погр. $R=\frac{5'',14}{\sqrt{11}}=\frac{5'',14}{3,316}=1'',55$ для $\varphi=58°22'47'',3$

§ 539. *Число равно-хорошихъ* и независимыхъ другъ отъ друга наблюденій, на которыхъ основывается прямое опредѣленіе неизвѣстнаго количества, называется *вѣсомъ* сего опредѣленія.

Предположимъ, что изъ ряда n наблюденій $x=\alpha$, $x=\alpha'$, $x=\alpha''$ . . . . . найдена была величина a, а потомъ изъ другаго ряда столь же хорошихъ n' наблюденій величина a'. Здѣсь

$a = \frac{[\alpha]}{n}$, $a' = \frac{[\alpha]}{n'}$. Пусть R будетъ вѣроят. погрѣшность для a, и R′ для a'. Такъ какъ по условію оба ряда наблюденій равно хороши, т. е. что каждое отдѣльное наблюденіе въ обоихъ рядахъ имѣютъ одну и туже вѣроят. погрѣшность r, то по урав. (13), получимъ

$$R = \frac{r}{\sqrt{n}} \text{ и } R' = \frac{r}{\sqrt{n'}}$$

откуда $$n : n' = R'^2 : R^2 \text{ или } \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R'^2} \ldots\ldots (17).$$

Но n и n' здѣсь представляютъ вѣсы опредѣленій a и a', а посему заключаемъ, что *вѣсы находятся въ обратномъ содержаніи съ квадратами ихъ вѣроятныхъ погрѣшностей*, или *въ прямомъ содержаніи съ дробями, которыхъ числители равны* 1, *а знаменатели суть квадраты соотвѣтствующихъ вѣроятныхъ погрѣшностей.*

Объяснимъ это примѣромъ: высота полюса φ въ Дерптѣ опредѣлялась секстантомъ, меридіанальнымъ кругомъ, вертикальнымъ кругомъ и теодолитомъ. Результаты каждаго ряда наблюденій были слѣдующіе:

Секстантомъ..	$\varphi = 58°22'53''$	съ	вѣроят.	погрѣш.	$= 5''$
Мерид. круг...	$\varphi = 58.22.47$	»	»	»	$= 1''$
Вертик. круг...	$\varphi = 58.22.47$	»	»	»	$= 2''$
Теодолитомъ..	$\varphi = 58.22.50$	»	»	»	$= 4''$

На основаніи вышеизложеннаго, вѣса n, n', n'' и n''' этихъ опредѣленій будутъ находиться въ содержаніи чиселъ $\frac{1}{25}$, 1, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{16}$, или по приведеніи этихъ дробей къ одному знаменателю, получимъ:

$$n : n' : n'' : n''' = 16 : 400 : 100 : 25.$$

И такъ, первое изъ четырехъ вышепредложенныхъ опредѣленій можно разсматривать выведеннымъ изъ 16, второе изъ 400, третье изъ 100, а четвертое изъ 25 такихъ наблюденій, которыхъ каждое отдѣльное сдѣлано съ одинаковою вѣроятною погрѣшностію.

§ 540. Если означимъ какъ и прежде вѣроят. погрѣш-

ность одного отдѣльнаго наблюденія чрезъ r, мѣру его точности чрезъ h, вѣроят. погрѣшность ариѳметической средины изъ n такихъ наблюденій чрезъ R, и мѣру точности сего послѣдняго чрезъ H, то по урав. (13), будетъ $n = \frac{r^2}{R^2}$; но въ слѣдствіе § 534 имѣемъ $hr = HR$, а посему

$$n = \frac{r^2}{R^2} = \frac{H^2}{h^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Такимъ же образомъ для n' того же рода наблюденій, получимъ

$$n' = \frac{r^2}{R'^2} = \frac{H'^2}{h^2}$$

откуда $$n : n' = H^2 : H'^2$$

или $$H : H' = \sqrt{n} : \sqrt{n'} \ldots\ldots\ldots (19).$$

И такъ, *мѣры точности* H и H' *двухъ опредѣленій содержатся какъ квадратные корни изъ ихъ вѣсовъ.* Такъ на прим. для данныхъ, предложенныхъ въ предыдущемъ §, точности опредѣленій высоты полюса четырьмя вышесказанными инструментами, будутъ находиться въ содержаніи чиселъ $\sqrt{16}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{100}$ и $\sqrt{25}$ или 4, 20, 10 и 5.

Далѣе урав. (18) показываетъ, что если положимъ $H = mh$, то получимъ $n = m^2$ и $m = \sqrt{n}$; отсюда заключаемъ, 1-е) что *число наблюденій,* которое можетъ доставить результатъ въ m разъ точнѣе, нежели одно отдѣльное наблюденіе *должно равняться квадрату этого числа* m и 2-е) что точность ариѳ. средины равна квадратному корню изъ числа наблюденій, принимая точность отдѣльнаго наблюденія за 1.

§ 541. Предположимъ, что a и a' суть двѣ величины x, изъ коихъ первая $x = a$ выведена была изъ n, а вторая $x = a'$ изъ n' наблюденій, и требуется найдти вѣроятнѣйшую величину для x изъ этихъ обоихъ опредѣленій. Здѣсь встрѣчаются два случая:

1-й Случай. Когда оба ряда наблюденій *равно-хороши,* т. е. *когда отдѣльныя наблюденія обоихъ рядовъ имѣютъ одинаковую вѣроятную погрѣшность.*

Хотя мы не знаемъ отдѣльныхъ наблюденій, но можемъ предположить, что найдено было

въ 1-мъ ряду: $x=\alpha,\ x=\alpha',\ x=\alpha''\ldots\ldots$ откуда $x=\frac{[\alpha]}{n}=a$

во 2-мъ ряду: $x=\alpha_1,\ x=\alpha_1',\ x=\alpha_1''\ldots\ldots$ » $x=\frac{[\alpha_1]}{n'}=a'$.

Если бы всѣ эти отдѣльныя наблюденія были извѣстны, то вѣроят. величина x равнялась бы средней ариѳметической изъ этихъ опредѣленій, а для сего надлежало бы взять сумму всѣхъ опредѣленій и потомъ раздѣлить ее на число всѣхъ наблюденій. Но сумма всѣхъ опредѣленій есть $[\alpha]+[\alpha_1]$ или $an+a'n'$, а число всѣхъ наблюденій есть $n+n'$, слѣд.

$$x=\frac{na+n'a'}{n+n'}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

Означивъ чрезъ R и R′ вѣроятныя погрѣшности ариѳметическихъ срединъ a и a', а чрезъ r вѣр. погрѣшность каждаго отдѣльнаго наблюденія, выведенное нами урав., отъ подстановки $\frac{r^2}{R^2}$ и $\frac{r^2}{R'^2}$ вмѣсто n и n', обратится въ

$$x=\frac{\frac{1}{R^2}.a+\frac{1}{R'^2}a'}{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots(21).$$

2-й Случай. *Когда наблюденія 1-го ряда различествуютъ по своей точности отъ наблюденій 1-го ряда.* Пусть r и R будутъ вѣроятныя погрѣшности каждаго отдѣльнаго наблюденія и ариѳметической средины a изъ n наблюденій 1-го ряда, а r' и R′ таковыя же для 2-го ряда, состоящаго изъ n' наблюденій, ариѳм. средина коихъ есть a'. По урав. (18) имѣемъ

$$n=\frac{r^2}{R^2}\ \text{и}\ n'=\frac{r'^2}{R'^2}.$$

Но какъ по теоріи вѣроятности одну и туже величину можно найти изъ меньшаго числа наблюденій при большей ихъ точности, (или изъ большаго числа наблюденій при меньшей точности), то предположимъ, что $x=a'$ выведено не

изъ n' наблюденій при вѣроят. погрѣшности r', но изъ n_1 наблюденій при вѣроят. погрѣшности r, т. е. одинаковой съ наблюденіями 1-го ряда. Въ семъ случаѣ $R' = \frac{r'}{\sqrt{n'}}$ будетъ также $= \frac{r}{\sqrt{n_1}}$, откуда $n_1 = \frac{r^2}{r'^2} n'$. Послѣ чего докажется какъ въ 1-мъ случаѣ, что вѣроятнѣйшая величина x, будетъ

$$x = \frac{na + n_1 a}{n + n_1},$$

или подставя $\frac{r^2}{r'^2} n'$ вмѣсто n_1, по сокращеніи получимъ

$$x = \frac{\frac{n}{r^2} a + \frac{n'}{r'^2} . a'}{\frac{n}{r^2} + \frac{n'}{r'^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (22).$$

Должно замѣтить, что это урав. отъ подстановки $\frac{1}{R^2}$ и $\frac{1}{R'^2}$ вмѣсто $\frac{n}{r^2}$ и $\frac{n'}{r'^2}$, обращается въ урав. (21); но $\frac{1}{R^2}$ и $\frac{1}{R'^2}$ выражаютъ (см. § 539) вѣсы результатовъ $x = a$ и $x = a'$; слѣд. заключаемъ, что *вѣроятнѣйшая величина* x, которая опредѣлена была нѣсколькими рядами наблюденій, имѣющими точность одинаковую или различную, получится, *если каждое опредѣленіе умножится на свой вѣсъ и сумма произведеній раздѣлится на сумму вѣсовъ*, т. е. если вообще вѣсы опредѣленій $a, a', a'' \ldots$ означимъ чрезъ $g, g', g'' \ldots$, то вѣроятнѣйшая величина будетъ $x = \frac{ag + a'g' + a''g'' + \ldots\ldots}{g + g' + g'' + \ldots}$. Знаменатель сей дроби, который изобразимъ чрезъ G, въ слѣдствіе § 539, выразитъ вѣсъ такимъ образомъ найденнаго результата. Если R есть его вѣроят. погрѣшность, то будетъ $G = \frac{1}{R^2}$, откуда $R = \frac{1}{\sqrt{G}}$.

На прим. взявъ данныя, предложенныя на стр. 258, именно:

$\varphi=58°22'53''$ съ вѣр. погр. $=5''$ и вѣсомъ $=\frac{1}{25}$.
$\varphi=58.22.47$ » » » $=1$ » $=1$
$\varphi=58.22.52$ » » » $=2$ » $=\frac{1}{4}$
$\varphi=58.22.50$ » » » $=4''$ » $=\frac{1}{16}$

вѣроятн. величина φ будетъ

$$=\frac{\frac{1}{25}.53''+47''+\frac{1}{4}.52+\frac{1}{16}.50}{\frac{1}{25}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$$

$$=\frac{0{,}04\times 53''+47''+0{,}25\times 52''+0{,}0625\times 50''}{0{,}04+1+0{,}25+0{,}0625}=48'',24$$

И такъ $\varphi=58°22'48'',24$ съ вѣсомъ $=1{,}3525$ и съ вѣроят. погрѣшностію $=\frac{1}{\sqrt{1{,}3525}}=0'',86$.

§ 542. Доселѣ говорено нами было о выводѣ вѣроятнѣйшей величины количества изъ опредѣленій непосредственно надъ нимъ сдѣланныхъ. Но часто случается, что искомыя величины не льзя непосредственно измѣрить, а дается зависимость ихъ отъ другихъ величинъ, непосредственно опредѣляемыхъ наблюденіями, такъ что сіи послѣднія служатъ функціями искомыхъ. Для объясненія сего случая, весьма часто встрѣчающагося въ практикѣ, возьмемъ уравненія 1-й степени со многими неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz+\ldots\ldots+m=0 \\ a'x+b'y+c'z+\ldots\ldots+m'=0 \\ a''x+b''y+c''z+\ldots+m''=0, \text{ и т. д.} \end{array}\right\}\ldots\ldots(23)$$

и положимъ, что величины m, m', m''.... найдены непосредственно изъ наблюденій. Когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, тогда опредѣленіе сихъ послѣднихъ не представитъ ни какой трудности и точность съ каковою они получатся будетъ зависѣть отъ степени точности количествъ m, m', m''.... Но когда число N уравненій болѣе числа n неизвѣстныхъ, то можно вывесть ихъ величину изъ различныхъ системъ уравненій. Число этихъ системъ будетъ столько, сколько различныхъ сочетаній можно сдѣлать изъ N по n, т. е. $\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n}$. Если бы m, m', m''.... найдены были изъ наблюденій съ точностію математическою, то каждая изъ этихъ системъ уравненій доставила бы намъ для x, y, z...

однѣ и тѣже величины. Но какъ этого никогда не случится, ибо съ каковою бы тщательностію наблюденія ни были сдѣланы, всегда они болѣе или менѣе будутъ имѣть погрѣшности, то рѣшеніе упомянутыхъ системъ, одной послѣ другой, доставитъ намъ столько же системъ и для неизвѣстныхъ, на прим.

$$x=\alpha,\quad y=\beta,\quad z=\gamma,\ldots.$$
$$x=\alpha',\ y=\beta',\ z=\alpha',\ldots$$
$$x=\alpha'',\ y=\beta'',\ z=\gamma''\ldots.$$

Если возьмемъ сперва одинъ рядъ изъ сихъ результатовъ и внесемъ въ данныя уравненія (22) вмѣсто x, y, z,... то по причинѣ не точности m, m', m''.... можемъ предположить, что 2-я части этихъ уравненій обратятся не въ нули, но въ v, v', v'',...или

$$a\alpha+b\beta+c\gamma\ldots.+m=v$$
$$a'\alpha+b'\beta+c'\gamma\ldots.+m'=v'$$
$$a''\alpha+b''\beta+c''\gamma\ldots.+m''=v'' \text{ и т. д.}$$

Здѣсь v, v', v''.... очевидно выражаютъ погрѣшности количествъ m, m', m''... Такимъ же образомъ другая система величинъ x, y, z.... доставитъ намъ другой рядъ подобнаго рода погрѣшностей v_1, v_1', v_1''.... и т. д.

Цѣль разсматриваемаго вопроса состоитъ въ томъ, чтобы въ уравненіяхъ

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz\ldots.+m=v \\ a'x+b'y+c'z\ldots.+m'=v' \\ a''x+b''y+c''z\ldots.+m''=v'' \text{ и т. д.}\end{array}\right\}\ldots\ldots.(24)$$

найдти вѣроятнѣйшія величины для x, y, z.... т. е. такія, которыя соотвѣтствуютъ погрѣшностямъ v, v', v''... наиболѣе вѣроятнымъ.

Но вѣроятность, что отдѣльно произойдутъ погрѣшности при одной и той же мѣрѣ точности наблюденій, какъ извѣстно, выражается чрезъ

$$\varphi v=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2v^2},\quad \varphi v'=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2v'^2},\ldots..$$

а вѣроятность W, что всѣ сіи погрѣшности случатся разомъ (см. стр. 241) будетъ

$$W=\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}e^{-h^2(v^2+v'^2+v''^2+\ldots)} \text{ или } =\frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}}e^{-h^2[v^2]}..(24)$$

Это выраженіе сложной вѣроятности W приметъ величину наибольшую тогда, когда показатель $[v^2]$ основанія e, будетъ имѣть величину *наименьшую* (minimum).

И такъ, если возьмутся для $x, y, z \ldots$ такія величины, которыя будучи подставлены въ уравненія (23), дадутъ разности $v, v', v'' \ldots$ *сумма квадратовъ* коихъ *есть наименьшая,* то эти величины $x, y, z \ldots$ будутъ наиболѣе вѣроятными. Для отысканія этой системы величинъ $x, y, z \ldots$ возвысимъ уравненія (23) въ квадратъ и сложимъ. Сумма таковыхъ квадратовъ будетъ:

$$\left.\begin{array}{l} x^2[a^2]+y^2[b^2]+z^2[c^2]+\ldots\ldots \\ 2xy[ab]+2xz[ac]+2yz[bc]+\ldots\ldots \\ 2x[am]+2y[bm]+\ldots\ldots+[m^2] \end{array}\right\}\ldots\ldots(25).$$

Но изъ диффер. изчисленія извѣстно, что если дана какая либо функція о многихъ перемѣнныхъ, на прим. $f(x, y, z \ldots) = V$, и требуется найдти такія величины $x, y, z \ldots$, которыя обращали бы ее въ величину наименьшую, должно взять частные дифференціалы въ разсужденіи сихъ перемѣнныхъ и приравнявъ каждый изъ нихъ нулю, т. е. $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV}{dy}=0$, $\frac{dV}{dz}=0, \ldots$ рѣшить сіи уравненія 1-й степени со многими неизвѣстными. Въ слѣдствіе чего, дифференцируя урав. (25), относительно x, потомъ относительно y, и т. д. по сокращеніи найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l} x[a^2]+y[ab]+z[ac]\ldots\ldots+[am]=0 \\ x[ab]+y[b^2]+z[cb]\ldots\ldots+[bm]=0 \\ x[ac]+y[bc]+z[c^2]\ldots\ldots+[cm]=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots\ldots(26).$$

Отсюда выводимъ слѣдующее правило: *для опредѣленія вѣроятнѣйшихъ величинъ* x, y, z.... *изъ уравненій, число коихъ болѣе числа неизвѣстныхъ, должно сперва умножить каждое изъ данныхъ* (23) *на коефиціентъ предъ* x, (съ тѣмъ знакомъ, какой при немъ находится) *и взять сумму произведеній; потомъ умножить такимъ же образомъ каждое*

изъ данныхъ на коефиціентъ предъ y *и также сложить эти произведенія между собою,* и т. д. Число таковыхъ окончательныхъ уравненій, называемыхъ нормальными, будетъ равно числу неизвѣстныхъ. Останется послѣ того ихъ рѣшить, какъ уравненія 1-й степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

Величины неизвѣстныхъ $x, y, z\ldots$ такимъ образомъ найденныя будучи подставлены въ урав. (24) дадутъ величину наиболѣе вѣроятныхъ погрѣшностей $v, v', v''\ldots$; послѣ чего легко будетъ найти сумму квадратовъ $[v^2] = v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots\ldots$ (*)

§ 543. При выводѣ вышеизложеннаго правила рѣшенія условныхъ уравненій, извѣстнаго подъ именемъ *способа наименьшихъ квадратовъ,* мы предполагали, что величины m, m', $m''\ldots$ данныя наблюденіями, найдены были съ одинаковою точностію. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда точность опредѣленія этихъ величинъ была различная; на прим. пусть $h, h', h''\ldots$ будутъ мѣры точности опредѣленій количествъ m, m' $m''\ldots$ Означимъ какъ и прежде, соотвѣтственныя погрѣшности оныхъ чрезъ $v, v', v''\ldots$ Вѣроятность, что онѣ произойдутъ отдѣльно выразятся уравненіями:

$$\varphi v = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2},\ \varphi v' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 v'^2},\ \varphi v'' = \frac{h''}{\sqrt{\pi}} e^{-h''^2 v''^2}, \ldots$$

(*) Впрочемъ сумма квадратовъ $[v^2]$, получится прямо изъ уравненія (25), ибо должно замѣтить, что можно представить его слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} x(x[a^2]+y[ab]+z[ac]\ldots\ldots+[am]+ \\ y(x[ab]+y[b^2]+z[bc]\ldots\ldots+[bm]+ \\ z(x[ac]+y[bc]+z[c^2]\ldots\ldots+[cm]+ \\ \ldots\ldots+[m^2]+x[am]+y[bm]+z[cm]+\ldots \end{array}\right\} = [v^2]$$

Но какъ по уравненіямъ (26) величины заключающіяся въ скобкахъ и служащія множителями величинъ $x, y, z\ldots$, равны нулю, то оно обратится въ

$$[v^2] = [m^2] + x[am] + y[bm] + z[cm] + \ldots\ldots (27)$$

выраженіе весьма удобное для вычисленія и вмѣстѣ служащее повѣркою вышеизложеннаго дѣйствія.

а вѣроятность W, что всѣ сіи погрѣшности произойдутъ разомъ будетъ

$$W = \frac{hh'h'' \ldots h^{(n)}}{\sqrt{\pi^n}} e^{-[h^2 v^2]}$$

Это выраженіе сложной вѣроятности W будетъ имѣть *maximum* въ томъ случаѣ когда $h^2v^2 + h'^2v'^2 + h''^2v''^2 + \ldots = [h^2v^2]$ будетъ имѣть *minimum*.

И такъ, для вывода вѣроятнѣйшихъ величинъ $x, y, z \ldots$ умножимъ уравненія (24), соотвѣтственно на $h, h', h'' \ldots$ и для краткости положивъ $hv = w, h'v' = w', h''v'' = w'', \ldots ah = \alpha$, $a'h' = \alpha' \ldots \beta h = \beta$, $b'h' = \beta' \ldots ch = \gamma$, $c'h' = \gamma', \ldots mh = \mu$, $m'h' = \mu' \ldots$ получимъ ограничиваясь тремя неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{l} w = \alpha x + \beta y + \gamma z + \mu \\ w' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \mu' \\ w'' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \mu'' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Сравнивая сіи формулы съ уравненіями (24) легко заключимъ, что для оредѣленія вѣроятнѣйшихъ величинъ x, y, z, должно поступать съ ними одинаково какъ на стр. 264, т. е. возвысить урав. (28) въ квадратъ, послѣ того дифференцировать послѣдовательно въ разсужденіи x, y и z, чрезъ что получатъ:

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha^2]x + [\alpha\beta]y + [\alpha\gamma]z + [\alpha\mu] = 0 = A \\ [\alpha\beta]x + [\beta^2]y + [\beta\gamma]z + [\beta\mu] = 0 = B \\ [\alpha\gamma]x + [\beta\alpha]y + [\gamma^2]z + [\gamma\mu] = 0 = C \end{array}\right\} \ldots (29)$$

означая чрезъ A, B, C, для сокращенія первыя части сихъ уравненій. Для суммы квадратовъ $w^2 + w'^2 + w''^2 \ldots = [w^2]$, которую впредь будемъ изображать чрезъ Ω, (см. урав. 27), найдемъ

$$\Omega \text{ или } [w^2] = [\mu^2] + [\alpha\mu]x + [\beta\mu]y + [\gamma\mu]z \ldots (30)$$

Къ сему присовокупимъ замѣчаніе: такъ какъ уже нами было доказано, что точности $h, h', h'' \ldots$ находятся въ содержаніи квадратныхъ корней изъ вѣсовъ опредѣленій $m, m', m'' \ldots$ то означивъ эти вѣсы чрезъ $g, g', g'' \ldots$ имѣемъ право вмѣсто $h, h', h'' \ldots$ соотвѣтственно умножить уравненія (24)

на $\sqrt{g}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{g''}$.... Посему если введены будутъ сіи последніе множители, то $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, выразятъ $[a^2g]$, $[abg]$, $[acg]$ и т. д.

§ 544. Величина неизвѣстныхъ x, y, z.... изъ формулъ (29), легко получится по общимъ правиламъ начальной алгебры чрезъ постепенныя подстановки. Здѣсь предлагаемъ Гауссовы знакоположенія, которыя въ послѣдствіи намъ понадобятся.

Урав. $A=0$, даетъ

$$x=-\frac{[\alpha\beta]}{[\alpha^2]}y-\frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}z-\frac{[\alpha\mu]}{[\alpha^2]}$$

Подставя эту величину x въ уравненія $B=0$ и $C=0$, и положивъ

$$\left.\begin{array}{l}[\beta^2]-\dfrac{[\alpha\beta]^2}{[\alpha^2]}=[\beta^2.1],\ [\gamma^2]-\dfrac{[\alpha\gamma]^2}{[\alpha^2]}=[\gamma^2.1]\\ [\beta\gamma]-\dfrac{[\alpha\beta][\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}=[\beta\gamma.1],\ [\beta\mu]-\dfrac{[\alpha\beta].[\alpha\mu]}{[\alpha^2]}=[\beta\mu.1]\\ [\gamma\mu]-\dfrac{[\alpha\gamma][\alpha\mu]}{[\alpha^2]}=[\gamma\mu.1]\end{array}\right\}\ldots.(31)$$

получимъ

$$\left.\begin{array}{l}[\beta^2.1]y+[\beta\gamma.1]z+[\beta\mu.1]=0=B'\\ [\beta\gamma.1]y+[\gamma^2.1]z+[\gamma\mu.1]=0=C'\end{array}\right\}\ldots\ldots.(32),$$

гдѣ B' и C' для краткости означаютъ соотвѣтственно первыя части уравненій (32). Изъ урав. $B'=0$, имѣемъ

$$y=-\frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}z-\frac{[\beta\mu.1]}{[\beta^2.1]}.$$

Подставя эту величину y въ урав. $C'=0$ и положивъ

$$\left.\begin{array}{l}[\gamma^2.1]-\dfrac{[\beta\gamma.1]^2}{[\beta^2.1]}=[\gamma^2.2]\\ [\gamma\mu.1]-\dfrac{[\beta\gamma.1].[\beta\mu.1]}{[\beta^2.1]}=[\gamma\mu.2]\end{array}\right\}\ldots\ldots(33)$$

найдемъ $$[\gamma^2.2]z+[\gamma\mu.2]=0=C''\ldots\ldots\ldots.(34).$$

Выведя отсюда величину z, подставимъ ее въ урав. $B'=0$, которое дастъ величину y; потомъ подставя y и z въ урав. $A=0$ получимъ изъ него величину x.

Такимъ образомъ, для опредѣленія вѣроятнѣйшихъ величинъ x, y и z имѣемъ систему уравненій

$$A=0$$
$$B=0, \quad B'=0$$
$$C=0. \quad C'=0, \quad C''=0.$$

§ 545. Выведенныя нами теперь уравненія совершенно достаточны для рѣшенія задачи находить вѣроятнѣйшія величины неизвѣстныхъ x, y, z. Остается еще разсмотрѣть рѣшеніе другаго весьма важнаго вопроса, а именно: какой точности можно ожидать отъ найденныхъ такимъ образомъ неизвѣстныхъ x, y, z. Очевидно, что только тогда можно считать систему наблюденій, приводящую къ опредѣленію этихъ количествъ *удовлетворительною*, когда увидимъ, что x, y и z выходятъ довольно точными.

Умноженіе каждаго изъ условныхъ уравненій (23) на соотвѣтствующую ему мѣру точности, приводитъ ихъ къ тому состоянію, какъ бы мѣры точности каждаго изъ уравненій (28), были равны нѣкоторой опредѣленной мѣрѣ точности $=H$, принимаемой за единицу. Тогда вѣроятность какой нибудь гипотезы, что величины x, y, z, заключаются между x, y, z и $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, будетъ пропорціональна выраженію $\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-H^2\Omega}.\, dx.dy.dz$, гдѣ n есть число условныхъ уравненій, а $\Omega=w^2+w'^2+w''^2+\ldots.$ Такъ какъ H зависитъ отъ принятой мѣры точности наблюденій и не имѣетъ никакого отношенія къ дѣлаемымъ гипотезамъ о x, y и z, то множитель $\left(\frac{H}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ должно принимать постояннымъ и независимымъ отъ x, y и z.

Очевидно будетъ $\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.\, dx.dy.dz=1$, ибо нѣтъ никакого сомнѣнія, что какова бы ни была гипотеза о x, y, z, ошибки ея заключаются въ разсужденіи каждой изъ нихъ между $-\infty$ и $+\infty$. Прежде нежели возьмемъ предыдущій интегралъ выразимъ сперва Ω удобнѣйшимъ образомъ.

Если умножимъ каждое изъ уравненій (28) на соотвѣт-

ствующее ему w, w', w''.... и потомъ все сложимъ, то получимъ

$$\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 = [\alpha w]x + [\beta w]y + [\gamma w]z + [\mu w].$$

Но если умножимъ тѣже самыя уравненія (28) на соотвѣтствующія имъ μ, μ', μ'', то найдемъ

$$[\mu w] = [\alpha\mu]x + [\beta\mu]y + [\gamma\mu]z + [\mu^2];$$

слѣд.

$$\Omega = [\alpha w]x + [\beta w]y + [\gamma w]z + [\alpha\mu]x + [\beta\mu]y + [\gamma\mu]z + [\mu^2] \ldots\ldots (35)$$

Здѣсь очевидно $[\alpha w] = \mathrm{A}$, $[\beta w] = \mathrm{B}$, $[\gamma w] = \mathrm{C}$. Эти выраженія, въ случаѣ вѣроятнѣйшей гипотезы, будутъ $=0$; но какъ мы теперь разсматриваемъ произвольную гипотезу, то эти выраженія не будутъ равны нулю.

Вычтя $\frac{\mathrm{A}^2}{[\alpha^2]} = \frac{[\alpha w]^2}{[\alpha^2]}$ изъ обѣихъ частей урав. (35), будетъ

$$\Omega - \frac{\mathrm{A}^2}{[\alpha^2]} = [\alpha w]\left\{x - \frac{[\alpha w]}{[\alpha^2]}\right\} + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + [\alpha\mu]x + [\beta\mu]y + [\gamma\mu]z + [\mu^2].$$

Но изъ урав. А или $[\alpha w] = [\alpha^2]x + [\alpha\beta]y + [\alpha\gamma]z + [\alpha\mu]$ имѣемъ

$$x - \frac{[\alpha w]}{[\alpha^2]} = -\frac{[\alpha\beta]}{[\alpha^2]}y - \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}z - \frac{[\alpha\mu]}{[\alpha^2]};$$

послѣ чего

$$[\alpha w]\left\{x - \frac{[\alpha w]}{[\alpha^2]}\right\} = \mathrm{A}\left\{-\frac{[\alpha\beta]}{[\alpha^2]}y - \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}z\right\} - \mathrm{A}\cdot\frac{[\alpha\mu]}{[\alpha^2]}$$

$$= \mathrm{A}\left\{-\frac{[\alpha\beta]}{[\alpha^2]}y - \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}z\right\} - [\alpha\mu]x - \frac{[\alpha\mu][\alpha\beta]}{[\alpha^2]}y - \frac{[\alpha\mu][\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}z - \frac{[\alpha\mu]^2}{[\alpha^2]};$$

слѣд. по сокращеніи получимъ

$$\Omega - \frac{\mathrm{A}^2}{[\alpha^2]} = y\left\{\mathrm{B} - \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha^2]}\mathrm{A}\right\} + z\left\{\mathrm{C} - \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}\mathrm{A}\right\}$$

$$+ y\left\{[\beta\mu] - \frac{[\alpha\mu][\alpha\beta]}{[\alpha^2]}\right\} + z\left\{[\gamma\mu] - \frac{[\alpha\mu][\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}\right\}$$

$$+ \left\{[\mu^2] - \frac{[\alpha\mu]^2}{[\alpha^2]}\right\}$$

Но какъ уравненія (32) произошли изъ уравненій (29), чрезъ подстановку въ В и С величины x изъ урав. $\mathrm{A}=0$, и очевидно, что

$$\mathrm{B}' = \mathrm{B} - \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha^2]}\mathrm{A}, \quad \mathrm{C}' = \mathrm{C} - \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha^2]}\mathrm{A}$$

то съ помощію выраженій (31), предшествующее урав. обратится въ

$$\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}=B'y+C'z+[\beta\mu.1]y+[\gamma\mu.1]z+[\mu^2.1]\ldots.(36)$$

положивъ $$[\mu^2.1]=[\mu^2]-\frac{[\alpha\mu]^2}{[\alpha^2]}\ldots\ldots\ldots\ldots(37).$$

Вычтемъ теперь $\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}$ изъ обѣихъ частей урав. (36) получимъ

$$\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}-\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}=B'\left(y-\frac{B'}{[\beta^2.1]}\right)+C'z+[\beta\mu.1]y$$
$$+[\gamma\mu.1]z+[\mu^2.1];$$

но изъ урав. (32) имѣемъ $y-\frac{B'}{[\beta^2.1]}=-\frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}z-\frac{[\beta\mu.1]}{[\beta^2.1]}$, а слѣд.

$$B'\left(y-\frac{B'}{[\beta^2.1]}\right)=-B'\frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}z-B'\frac{[\beta\mu.1]}{[\beta^2.1]}$$

или $=-B'\frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}z-y-\frac{[\beta\mu.1][\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}z-\frac{[\beta\mu.1]^2}{[\beta^2.1]}$;

послѣ чего предшествующее урав. обратится въ

$$\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}-\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}=z\left\{C'-B'\frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}\right\}+z\left\{[\gamma\mu.1]\right.$$
$$\left.-\frac{[\beta\mu.1][\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}\right\}+\left([\mu^2.1]-\frac{[\beta\mu.1]^2}{[\beta^2.1]}\right)$$

или положивъ

$$[\gamma\mu.1]-\frac{[\beta\mu.1][\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}=[\gamma\mu.2],$$

$$[\mu^2.1]-\frac{[\beta\mu.1]}{[\beta^2.1]}=[\mu^2.2],$$

и по причинѣ, что изъ уравненій (32) и (34)

$$C'-B'\frac{[\beta\gamma.1]}{[\beta^2.1]}=C''$$

получимъ

$$\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}-\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}=C''z+(\gamma\mu.2)z+[\mu^2.2].$$

Если наконецъ вычтемъ $\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}$ изъ обѣихъ частей сего послѣдняго, т. е.

$$\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}-\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}-\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}=C''\left(z-\frac{C''}{[\gamma^2.2]}\right)+[\gamma\mu.2]z+[\mu^2.2]$$

и какъ урав. (34) даетъ

$$z-\frac{C''}{[\gamma^2.2]}=-\frac{[\gamma\mu.2]}{[\gamma^2.2]}, \text{ а посему}$$

$$C''\left\{z-\frac{C''}{[\gamma^2.2]}\right\}=-[\gamma\mu.2]z-\frac{[\gamma\mu.2]^2}{[\gamma^2.2]},$$

то найдемъ

$$\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}-\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}-\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}=[\mu^2.3]$$

положивъ $$[\mu^2.2]-\frac{[\gamma\mu.2]^2}{[\gamma^2.2]}=[\mu^2.3];$$

отсюда

$$\Omega=\frac{A^2}{[\alpha^2]}+\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}+\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}+[\mu^2.3]\ldots\ldots(38).$$

Должно при семъ замѣтить, что количества $[\alpha^2]$, $[\beta^2.1]$, $[\gamma^2.2]$ суть всегда положительныя. Въ разсужденiи $[\alpha^2]$ это очевидно, ибо $[\alpha^2]=\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots.$ есть сумма квадратовъ. Чтобы убѣдиться въ томъ же касательно $[\beta^2.1]$, разсмотримъ $\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}$; оно равняется количеству $\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}+\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}$ $+[\mu^2.3]$, которое вовсе не зависитъ отъ x. Посему, если бы мы опредѣлили x изъ урав. $A=0$ и вставили его величину въ каждое изъ w, w', w''.... въ урав. (28), то взявъ сумму квадратовъ такихъ w, w', w'',.... мы прямо получили бы $\Omega-\frac{A^2}{[\alpha^2]}$. Но въ этой суммѣ квадратовъ коефицiентъ предъ y^2, долженъ быть $=[\beta^2.1]$; слѣд. $[\beta^2.1]$ будетъ количество положительное, равное суммѣ квадратовъ новыхъ коефицiентовъ, которые находятся предъ y въ выраженiяхъ $w, w', w''\ldots$, гдѣ вмѣсто x поставлена величина изъ урав. $A=0$. Такимъ же образомъ докажется, что $[\gamma^2.2]$ есть коефицiентъ предъ

z^2 въ суммѣ квадратовъ $[w^2]$, когда въ каждомъ изъ $w, w', w''\ldots$ вмѣсто x и y подставимъ величины выведенныя изъ уравненій $A=0$, $B'=0$, а слѣд. что этотъ коефиціентъ будетъ положительный.

§ 546. Изъ выраженія Ω (см. ур. 38) легко вывесть правило для опредѣленія вѣса найденныхъ вѣроятнѣйшихъ количествъ x, y, z. Мы видѣли, что при всякой гипотезѣ объ x, y, z, будетъ

$$\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.\,dx.dy.dz=1.$$

Такъ какъ x, y и z независятъ другъ отъ друга, то можно интегрировать отдѣльно въ отношеніи къ каждому изъ количествъ x, y, z. Если будемъ сперва интегрировать въ разсужденіи x, а другія количества примемъ за постоянныя, то интегралъ $\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.\,dx$ будетъ представлять вѣроятность опредѣленной гипотезы относительно однихъ только y и z, между тѣмъ какъ x остается произвольною величиною между $x=-\infty$ и $x=+\infty$. Но въ выраженіи $\Omega=\frac{A^2}{[\alpha^2]}+\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}$ $+\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}+[\mu^2.3]$, x входитъ только въ A; слѣд. въ этомъ случаѣ одна измѣняемая величина будетъ A, и изъ выраженія A въ урав. (29) выходитъ, что $[\alpha^2]dx=dA$, а потому

$$\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.\,dx=\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.\frac{dA}{[\alpha^2]}$$

$$=\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\left(\frac{A^2}{[\alpha^2]}+\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}+\frac{C''}{[\gamma^2.2]}+[\mu^2.3]\right)}\times\frac{dA}{[\alpha^2]}$$

$$=\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}.e^{-H^2\left(\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}+\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}+[\mu^2.3]\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2.\frac{A^2}{[\alpha^2]}}.\frac{dA}{[\alpha^2]}$$

или означивъ постоянный коефиціентъ предъ интеграломъ

чрезъ M, и приравнявъ произведеніе $\frac{H^2A^2}{[\alpha^2]}$ перемѣнному количеству t^2, $\frac{H^2A^2}{[\alpha^2]}=t^2$ или $\frac{HA}{\sqrt{[\alpha^2]}}=t$, откуда $\frac{dA}{[\alpha^2]}=\frac{dt}{H\sqrt{[\alpha^2]}}$, отчего предшествующее выраженіе обратится въ

$$M.\frac{1}{H\sqrt{[\alpha^2]}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}.dt;$$

но этотъ интегралъ какъ извѣстно равенъ $\sqrt{\pi}$, слѣд. получимъ

$$\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-H^2\Omega}.dx=\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}.\frac{\sqrt{\pi}}{H\sqrt{[\alpha^2]}}.e^{-H^2\left\{\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}+\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}+[\mu^2.3]\right\}}.$$

Если умножимъ это выраженіе на dy и возьмемъ интегралъ отъ $y=-\infty$ до $y=+\infty$, то получимъ опять вѣроятность гипотезы, что z имѣетъ нѣкоторую определенную величину, соотвѣтственную этой гипотезѣ, между тѣмъ какъ x и y остаются произвольными. Но y заключается только въ $B'=[\beta^2.1]y+[\beta\gamma.1]$, откуда $dB'=[\beta^2.1].dy$, а посему

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-H^2\Omega}.dx.dy=$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{H\sqrt{[\alpha^2]}}.e^{-H^2\left\{\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}+[\mu^2.3]\right\}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-H^2.\frac{B'^2}{[\beta^2.1]}}.\frac{dB'}{[\beta^2.1]};$$

Поступая съ симъ интеграломъ, какъ съ предшествующимъ, найдемъ, что онъ $=\frac{1}{H\sqrt{[\beta^2.1]}}.\sqrt{\pi}$, а слѣд.

$$\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-H^2\Omega}.dx.dy=$$

$$\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}.\frac{\pi.e^{-H^2[\mu^2.3]}}{H^2\sqrt{[\alpha^2].[\beta^2.1]}}.e^{-H^2.\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}}\ldots\ldots\ldots(39)$$

Это выраженіе зависитъ лишь отъ z, который входитъ въ C''. Если умножимъ его на dz и возьмемъ интегралъ отъ $z=-\infty$ до $z=+\infty$, то, по причинѣ, что $C''=[\gamma^2.2]z+[\gamma\mu.2]$, и $dC''=[\gamma^2.2]dz$, получимъ

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.dx.dy.dz = \frac{\sqrt{\pi}^3.e^{-H^2[\mu^2.3]}}{H^3\sqrt{[\alpha^2][\beta^2.1][\gamma^2.2]}}$$

а слѣд.

$$\frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-H^2\Omega}.dx.dy.dz = 1$$

$$= \frac{H^n}{\sqrt{\pi^n}} \frac{\sqrt{\pi}^3.e^{-H^2[\mu^2.3]}}{H^3\sqrt{[\alpha^2][\beta^2.1][\gamma^2.2]}}.$$

Урав. (39) выражаетъ вѣроятность гипотезы о нѣкоторомъ опредѣленномъ z, оставляя произвольными x и y. Чтобы представить это урав. въ простѣйшемъ видѣ, раздѣлимъ его на выведенное нами теперь выраженіе 1-цы, отъ чего оно не перемѣнится и получимъ

$$\frac{H\sqrt{[\gamma^2.2]}}{\sqrt{\pi}}.e^{-H^2\frac{C''^2}{[\gamma^2.2]}} \text{ или } = \frac{H\sqrt{[\gamma^2.2]}}{\sqrt{\pi}}.e^{-H^2\left\{z+\frac{[\gamma\mu.2]}{[\gamma^2.2]}\right\}^2}.$$

Если дадимъ для z нѣкоторую величину опредѣленную, то посредствомъ сего выраженія можемъ вычислить какова вѣроятность будетъ этой величины z. Вѣроятность будетъ наибольшею при такомъ z, который дѣлаетъ $C''=0$, и тогда опредѣлится z самымъ выгоднымъ образомъ, что впрочемъ мы уже и прежде видѣли. Сверхъ того, это выраженіе показываетъ, что когда вмѣсто z подставимъ его величину, которая даетъ урав. $C''=0$, то вѣроятность, что въ этомъ, самымъ выгоднымъ образомъ опредѣленномъ z, не заключается никакой погрѣшности, будетъ $\frac{H\sqrt{[\gamma^2.2]}}{\sqrt{\pi}}$, и слѣд. мѣра точности, соотвѣтствующая этому вѣроятнѣйшему z будетъ $H=\sqrt{[\gamma^2.2]}$, гдѣ H есть принятая единица при выраженіи мѣръ точности h, h', h''..... Въ слѣдствіе сего, вѣсъ такого опредѣленія (см. урав. 19) будетъ $=[\gamma^2.2]$ принимая $H=1$, т. е. что *вѣсъ количества* z въ семъ случаѣ равняется коефиціенту предъ z въ послѣднемъ уравненіи, заключающемъ изъ всѣхъ неизвѣстныхъ одно только z.

Отсюда выходитъ общее правило, предложенное Гауссомъ (*), опредѣлять вѣсы вѣроятнѣйшихъ величинъ, при какомъ

(*) См. его Theoria motus corporum coelestium § 182.

бы то нибыло числѣ неизвѣстныхъ. Оно состоитъ въ слѣдующемъ:

Если помощію послѣдовательныхъ подстановокъ станемъ исключать постепенно неизвѣстныя одно послѣ другаго изъ уравненій, къ которымъ приводитъ способъ наименьшихъ квадратовъ, и если не станемъ вводить для облегченія дѣйствій никакихъ множителей, то въ послѣднемъ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ, коефиціентъ предъ неизвѣстнымъ выразитъ вѣсъ вѣроятнѣйшаго опредѣленія онаго принимая за 1-цу мѣры точности, ту самую 1-цу, которая введена была въ основныя уравненія.

Для опредѣленія по этому правилу вѣсовъ всѣхъ неизвѣстныхъ количествъ, должно сдѣлать подстановки и исключенія такъ, чтобы по очереди каждое изъ неизвѣстныхъ приходилось остающимся въ послѣднемъ уравненіи.

Для упрощенія этого многосложнаго дѣйствія, дѣлаютъ два полныхъ исключенія въ обратномъ порядкѣ, такъ что если неизвѣстныя суть x, y, z, t, u, и если подставляли сперва x, потомъ, y, z, t, и получили уравненія съ однимъ u, то надобно при обратномъ исключеніи подставлять сперва u, потомъ t, z, y и доходить до уравненія съ однимъ x. Исполнивъ такимъ образомъ два полныхъ исключенія, дѣлаютъ послѣ того новыя исключенія до z и т. д. (*)

§ 547. Въ заключеніе остается по найденнымъ вѣроятнѣйшимъ величинамъ неизвѣстныхъ $x, y, z\ldots$ опредѣлить среднюю и вѣроятнѣйшую погрѣшность наблюденій. Если подставимъ въ условныя уравненія (28) вмѣсто неизвѣстныхъ $x, y, z,\ldots$ ихъ вѣроятнѣйшія величины, то сумма квадратовъ

(*) Гауссъ предложилъ въ *Theoria combinationis observationum*, etc. еще другую методу вычислять вѣсы вѣроятнѣйшихъ опредѣленій неизвѣстныхъ количествъ, по которой опредѣляется вѣсъ каждаго неизвѣстнаго, независимо отъ изъисканія вѣсовъ другихъ количествъ; однако въ практикѣ чаще употребляется вышеизложенный нами способъ, потому болѣе, что онъ соединенъ со многими повѣрками вычисленія вѣроятнѣйшихъ $x, y, z\ldots$ Въ Berlin. Astron. Jahrbuch für 1835, помѣщены сверхъ того другіе способы для рѣшенія того же вопроса, предложенные астрономомъ *Гансеномъ*.

количествъ w, w', w''..., которыя мы принимаемъ за правдоподобныя погрѣшности условныхъ уравненій очевидно въ семъ случаѣ будетъ $=\Omega=[\mu^2.3]$, предполагая что число неизвѣстныхъ есть три. Если бы эти погрѣшности въ точности выражали истинныя погрѣшности, и число условныхъ уравненій (28) было n, тогда средняя погрѣшность ε каждаго отдѣльнаго уравненія нашлась бы изъ уравненія $n\varepsilon^2=[\mu^2.3]$ (см. § 536); но какъ истинныхъ погрѣшностей условныхъ уравненій не знаемъ, а имѣемъ только ихъ вѣроятныя величины, то очевидно это уравненіе не будетъ справедливо. Пусть x_0, y_0, z_0, будутъ вѣроятныя величины неизвѣстныхъ x, y, z, т. е. тѣ которыя дѣлаютъ Ω *minimum*. Предположимъ далѣе, что v, v', v''.... будутъ величины, въ которыя обращаются w, w' w''.... когда вмѣсто x, y и z подставимъ ихъ вѣроятныя величины x_0, y_0 и z_0. Такимъ образомъ будетъ

$$\left.\begin{array}{l} v=\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\mu \\ v'=\alpha' x_0+\beta' y_0+\gamma' z_0+\mu' \\ v''=\alpha'' x_0+\beta'' y_0+\gamma'' z_0+\mu'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (a)$$

Въ семъ случаѣ на основаніи вышедоказаннаго (см. стр. 272) будетъ $[v^2]=[\mu^2.3]$, $[\alpha v]=0$, $[\beta v]=0$, $[\gamma v]=0$. Послѣ этого допустимъ, что истинныя величины количествъ x, y, z, будутъ $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$, $z_0+\Delta z$, и что соотвѣтствующія имъ истинныя величины количествъ w, w', w''... суть $\lambda, \lambda', \lambda''$... Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \lambda=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z+v \\ \lambda'=\alpha'\Delta x+\beta'\Delta y+\gamma'\Delta z+v' \\ \lambda''=\alpha''\Delta x+\beta''\Delta y+\gamma''\Delta z+v'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots (b)$$

Взявъ сумму квадратовъ этихъ уравненій и не забывая, что $[\alpha v]=0$, $[\beta v]=0$, $[\gamma v]=0$, получимъ

$$[\lambda^2]=[v^2]+\Sigma\left\{(\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z)^2\right\}$$

Для выраженія сей суммы $[\lambda^2]$ поступимъ какъ въ § 545, а именно положивъ

$$\begin{array}{l} [\alpha^2]\Delta x+[\alpha\beta]\Delta y+[\alpha\gamma]\Delta z=A_0 \\ [\alpha\beta]\Delta x+[\beta^2]\Delta y+[\beta\gamma]\Delta z=B_0 \\ [\alpha\gamma]\Delta x+[\beta\gamma]\Delta y+[\gamma^2]\Delta z=C_0 \end{array}$$

(гдѣ $A_o=[\alpha\lambda]-[\alpha v]=[\alpha\lambda]$; также $B_o=[\beta\lambda]$ и $C_o=[\gamma\lambda]$); потомъ рѣшивъ эти уравненія, получимъ

$$[\beta^2.1]\Delta y+[\beta\gamma.1]\Delta z=B'_o,$$
$$[\beta\gamma.1]\Delta y+[\gamma^2.1]\Delta z=C'_o,$$
$$[\gamma^2.2]\Delta z=C''_o.$$

Здѣсь $[\beta^2.1]$, $[\beta\gamma.1]$ и проч. имѣютъ тѣ же самыя значенія какъ и въ § 544.

Если исполнимъ съ сими величинами преобразованія, подобно изложеннымъ выше, то не забывая, что $[\lambda^2]=n\varepsilon^2$ и $[v^2]=[\mu^2.3]$, найдемъ

$$n\varepsilon^2=[v^2]+\frac{A^2_o}{[\alpha^2]}+\frac{B'^2_o}{[\beta^2.1]}+\frac{C''^2_o}{[\gamma^2.2]}.$$

Такъ, какъ послѣдніе три члена всегда положительные, то заключаемъ, что $n\varepsilon^2>[v^2]$, откуда $\varepsilon^2>\frac{[v^2]}{n}$ или $\varepsilon^2>\frac{[\mu^2.3]}{n}$. Должно при семъ замѣтить, что это выраженіе выведено при предположеніи трехъ неизвѣстныхъ x, y и z; но еслибы ихъ было болѣе, на прим. p, то такимъ же образомъ доказали бы, что $\varepsilon^2>\frac{[\mu^2.p]}{n}$ или $\varepsilon^2>\frac{[v^2]}{n}$. Отсюда легко видѣть, что средняя погрѣшность зависитъ какъ отъ числа p неизвѣстныхъ, такъ и отъ числа n уравненій, а потому имѣемъ право положить,

$$\varepsilon^2=\frac{[v^2]}{f(n,p)},$$

гдѣ f означаетъ нѣкоторую функцію. Для опредѣленія вида сей функціи, замѣтимъ, что если $n=p$, т. е. число уравненій равняется числу неизвѣстныхъ, то $[v^2]=0$, ибо тогда невозможно будетъ для опредѣленія неизвѣстныхъ примѣнить вычисленіе вѣроятностей; но какъ въ семъ случаѣ не льзя ничего заключить о погрѣшностяхъ наблюденій, то ε приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, т. е. что функція $f(n,p)$ будетъ $=0$. Отсюда видимъ, что всѣ члены составляющіе искомую функцію, должны въ себѣ заключать множителя $n-p$ обращающагося въ нуль при $n=p$. И такъ, можно положить, что $f(n,p)$ выражается слѣдующимъ рядомъ:

$$f(n,p) = D(n-p) + D'(n-p)^2 + D''(n-p)^3 + \ldots.$$

гдѣ D, D′, D″.... суть постоянные коефиціенты.

Если теперь положимъ, что $p=1$, т. е. что во всѣхъ n уравненіяхъ входитъ только одно неизвѣстное, то на основаніи § 538, $\varepsilon^2 = \frac{[v^2]}{n-1}$. И такъ при $p=1$, функція $f(n,p)$ обращается въ $n-1$, а слѣд. $D=1$, $D'=0$ $D''=0$ и проч. Но какъ по условію коефиціенты D, D′, D″.... суть постоянные и независимые отъ p, то заключаемъ, что какое бы число p ни было, искомая функція будетъ $f(n,p)=n-p$, а слѣд. средняя погрѣшность каждаго уравненія будетъ

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-p}}.$$

Послѣ чего, на основаніи § 536, для величины вѣроятнѣйшей погрѣшности r каждаго уравненія получимъ

$$r = 0{,}6745\sqrt{\frac{[v^2]}{n-p}}.$$

РѢШЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСОВЪ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗІИ, ПОСРЕДСТВОМЪ СПОСОБА НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ.

I. ИСПРАВЛЕНІЕ УГЛОВЪ.

§ 548. Положимъ, что изъ точки O по многократной методѣ измѣрены были между 4-мя точками A, B, C и D триг. сѣти, углы AB, AC, AD, BC, BD и CD. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 будутъ величины сихъ угловъ, доставленныя наблюденіями; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и v_6 погрѣшности оныхъ и наконецъ a, b и c исправленныя величины первыхъ трехъ угловъ, т. е.

$$v_1=a-O_1,\ v_2=b-O_2,\ v_3=c-O_3,$$
$$v_4=(b-a)-O_4,\ v_5=(c-a)-O_5,\ v_6=(c-b)-O_6.$$

Для опредѣленія a, b и c, отбросимъ въ углахъ O_1, O_2, O_3 доли секунды, и изобразимъ такого рода приближенные углы чрезъ α, β и γ, а соотвѣтствующія имъ поправки чрезъ $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, т. е.

$$a=\alpha+d\alpha,\ b=\beta+d\beta,\ c=\gamma+d\gamma.$$

Подставя сіи величины въ вышепредложенныя уравненія получимъ

$$\begin{aligned}
v_1&=\alpha+d\alpha-O_1 && \text{или } =M_1+d\alpha \text{ положивъ } && M_1=\alpha-O_1\\
v_2&=\beta+d\beta-O_2 && =M_2+d\beta \quad » && M_2=\beta-O_2\\
v_3&=\gamma+d\gamma-O_3, && =M_3+d\gamma \quad » && M_3=\gamma-O_3\\
v_4&=(\beta-\alpha)-d\alpha+d\beta-O_4 && =M_4-d\alpha+d\beta \quad » && M_4=(\beta-\alpha)-O_4\\
v_5&=(\gamma-\alpha)-d\alpha+d\gamma-O_5 && =M_5-d\alpha+d\gamma \quad » && M_5=(\gamma-\alpha)-O_5\\
v_6&=(\gamma-\beta)-d\beta+d\gamma-O_6 && =M_6-d\beta+d\gamma \quad » && M_6=(\gamma-\beta)-O_6.
\end{aligned}$$

Такъ какъ цѣль рѣшенія вопроса, очевидно заключается въ опредѣленіи $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, такимъ образомъ, чтобы величины

поправокъ v_1, v_2, $v_3 \ldots . v_6$ были вѣроятнѣйшія, или что все равно, чтобы сумма квадратовъ оныхъ была наименьшая, то достаточно поступить съ сими 6-ю уравненіями по способу изложенному въ § 542. При семъ слѣдуетъ замѣтить, что если при измѣреніи угловъ O_1, O_2, $O_3 \ldots .$ дѣлалось не одинаковое число повтореній, а самыя наблюденія исполнены были съ одинаковою точностію, то принимая число наблюденій за вѣсы найденныхъ результатовъ O_1, O_2, $O_3 \ldots .$ и изобразивъ число наблюденій чрезъ n_1, $n_2 \ldots . n_6$, должно предварительно (см. § 543) вышепредложенныя уравненія умножить соотвѣтственно на $\sqrt{n_1}$, $\sqrt{n_2}$, $\sqrt{n_3} \ldots . \sqrt{n_6}$. По совершеніи изложеннаго выше, получимъ слѣдующія нормальныя уравненія:

$$0 = l + A d\alpha + B d\beta + C d\gamma,$$
$$0 = l' + A' d\alpha + B' d\beta + C' d\gamma,$$
$$0 = l'' + A'' d\alpha + B'' d\beta + C'' d\gamma,$$

положивъ для сокращенія

$$l = n_1 M_1 - n_4 M_4 - n_5 M_5, \quad A = n_1 + n_4 + n_5, \quad B = -n_4, \quad C = -n_5$$
$$l' = n_2 M_2 + n_4 M_4 - n_6 M_6, \quad A' = -n_4, \quad B' = n_2 + n_4 + n_6, \quad C' = -n_6$$
$$l'' = n_3 M_3 + n_5 M_5 + n_6 M_6, \quad A'' = -n_5, \quad B'' = -n_6, \quad C'' = n_3 + n_5 + n_6$$

На прим. пусть измѣренные углы и число наблюденій будутъ:

$$O_1 = 47^\circ 17' 1'',4, \qquad n_1 = 30$$
$$O_2 = 96.\ 52.\ 16,8, \qquad n_2 = 20$$
$$O_3 = 152.\ 54.\ 6,8, \qquad n_3 = 26$$
$$O_4 = 49.\ 35.\ 14,3, \qquad n_4 = 25$$
$$O_5 = 105.\ 37.\ 7,8, \qquad n_5 = 28$$
$$O_6 = 56.\ 1.\ 48,9, \qquad n_6 = 44$$

Не обращая вниманія на число градусовъ и минутъ, принимаемъ за приближенную величину угловъ, слѣдующіе:

$$\alpha = 1'', \qquad M_1 = \alpha - O_1 = -0'',4$$
$$\beta = 17, \qquad M_2 = \beta - O_2 = +0,2$$
$$\gamma = 7 \qquad M_3 = \gamma - O_3 = +0,2$$
$$\beta - \alpha = 16 \qquad M_4 = (\beta - \alpha) - O_4 = +1,7$$
$$\gamma - \alpha = 6, \qquad M_5 = (\gamma - \alpha) - O_5 = -1,8$$
$$\gamma - \beta = 50, \qquad M_6 = (\gamma - \beta) - O_6 = +1,1$$

Введя сіи величины въ выраженія l, A, B и C, получимъ нормальныя уравненія:

$$0 = -4'',1 + 83.d\alpha - 25.d\beta - 28.d\gamma$$
$$0 = -1,9 - 25.d\alpha + 89.d\beta - 44.d\gamma$$
$$0 = +3,2 - 28.d\alpha - 44.d\beta + 98.d\gamma.$$

Рѣшивъ сіи три уравненія и отбрасывая тысячныя доли секунды, найдемъ:

$$d\alpha = +0'',06,\quad d\beta = +0'',04,\quad d\gamma = 0'',00$$

Послѣ чего искомые углы и погрѣшности наблюденій будутъ:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + d\alpha = 1'',06, & v_1 &= -0'',34 \\ b &= \beta + d\beta = 17,04, & v_2 &= +0,24 \\ c &= \gamma + d\gamma = 7,00, & v_3 &= +0,20 \\ b - a &= 15,98, & v_4 &= +1,68 \\ c - a &= 5,94, & v_5 &= -1,86 \\ c - b &= 49,96, & v_6 &= +1,06. \end{aligned}$$

II. ОПРЕДѢЛЕНІЕ ТОЧКИ ПО МНОГИМЪ ДАННЫМЪ.

§ 549. Положимъ, что изъ точки D (чер. 207) измѣрены были два угла между тремя данными точками и что x, y, суть координаты вычисленныя по способу предложенному въ § 403. Если изъ D кромѣ упомянутыхъ трехъ точекъ, видимы еще многія другія, то съ измѣненіемъ системы наблюдаемыхъ, получится всякій разъ для координатъ x, y, величины, нѣсколько различествующія однѣ отъ другихъ, по причинѣ неизбѣжныхъ погрѣшностей въ наблюденіяхъ. Вѣроятнѣйшія величины координатъ въ семъ случаѣ, получатся слѣдующимъ образомъ:

Означимъ чрезъ a и b координаты какой либо одной изъ данныхъ точекъ, на прим. M (чер. 207): длина линіи d соединяющей сію точку съ опредѣляемою D и азимутъ z (или дирекціональный уголъ) этой линіи при точкѣ D, какъ извѣстно выразятся уравненіями:

$$\tang z = \frac{b - y}{a - x},\quad d = \frac{a - x}{\cos z}.$$

Если введемъ въ сіи формулы вмѣсто y и x приближенныя величины координатъ, то z и d найдутся отсюда также при-

ближенно. Для опредѣленія погрѣшности угла z, одифференцируемъ 1-е изъ вышепредложенныхъ уравненій, и будетъ

$$\frac{dz \sin 1''}{\cos^2 z} = \frac{(b-y)dx}{(a-x)^2} - \frac{(a-x)dy}{(a-x)^2};$$

но $(a-x)^2 = d^2 \cos^2 z$, посему по сокращеніи получимъ

$$dz = \frac{b-y}{d^2 \sin 1''} . dx - \frac{(a-x)}{d^2 \sin 1''} . dy$$

или

$$dz = \alpha . dx + \beta . dy$$

положивъ

$$\alpha = \frac{b-y}{d^2 \sin 1''}, \quad \beta = -\frac{a-x}{d^2 \sin 1''}.$$

Здѣсь dx и dy очевидно выражаютъ погрѣшности (въ линейной мѣрѣ) координатъ x и y, а dz погрѣшность (въ секундахъ) вычисленнаго азимута z. Слѣд. истинная величина Z азимута, разсматриваемой линіи будетъ

$$Z = z + \alpha dx + \beta . dy.$$

Такимъ же образомъ истинныя величины азимутовъ Z', Z''... линій соединяющихъ опредѣляемую точку съ другою, третьею и т. д. точками (ведя имъ счетъ отъ точки M въ туже сторону, какъ считаются азимуты), выразятся чрезъ

$$Z' = z' + \alpha' dx + \beta' dy,$$

$$Z'' = z'' + \alpha'' dx + \beta'' dy \text{ и т. д.}$$

Предположимъ теперь, что̀ углы между данными точками измѣрялись *по многократной методѣ* независимо одинъ отъ другаго, т. е. сперва между 1-мъ предметомъ и 2-мъ, потомъ между 2-мъ и 3-мъ, и т. д. Изобразимъ измѣренную величину 1-го угла чрезъ i, 2-го чрезъ i', 3-го чрезъ i''.... Такъ какъ истинныя величины сихъ угловъ будутъ $Z'-Z$, $Z''-Z'$, $Z'''-Z''$..., то онѣ будутъ равны найденнымъ чрезъ измѣреніе въ томъ только случаѣ, когда наблюденія дѣлаемы были безъ всякихъ погрѣшностей; въ слѣдствіе чего получатъ слѣдующія уравненія

$$Z' - Z - i \quad \text{или} \quad (\alpha' - \alpha)dx + (\beta' - \beta)dy + m = 0,$$

$$Z'' - Z' - i' \quad \text{или} \quad (\alpha'' - \alpha')dx + (\beta'' - \beta' dy + m' = 0,$$

$$Z''' - Z'' - i'' \quad \text{или} \quad (\alpha''' - \alpha'')dx + (\beta''' - \beta'')dy + m'' = 0, \text{ и т. д.}$$

положивъ для сокращенія $m=(z'-z)-i$, $m'=(z''-z')-i'$, $m''=(z'''-z'')-i''$ и т. д. Здѣсь число условныхъ уравненій будетъ равно числу данныхъ точекъ безъ единицы, а потому если число наблюдаемыхъ точекъ болѣе трехъ, то искомыя поправки dx и dy опредѣлятся не иначе какъ по способу наименьшихъ квадратовъ (см. § 542). Къ сему должно присовокупить, что если углы i, i', i''.... измѣрены были не съ одинаковою точностію, то должно поступить какъ объяснено было въ § 543, т. е. умножить предварительно каждое изъ условныхъ уравненій на квадратный корень изъ вѣса опредѣленія угла i, или что все равно на квадратный корень изъ числа наблюденій; такъ на прим. если при измѣреніи угла i сдѣлано было 15-ти кратное повтореніе, угла i' 10-ти кратное, угла i'' 20-ти кратное..., то вышесказанныя уравненія умножатся соотвѣтственно на $\sqrt{15}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$ и т. д.

Но если углы между данными предметами измѣрялись по методѣ Струве (см. § 56), и если отсчитываніе на лимбѣ при визированіи трубою на 1-й предметъ вычиталось изъ отсчитываній при визированіи на прочіе предметы, то разности выразятъ величину угловъ между 1-мъ и 2-мъ, между 1-мъ и 3-мъ, между 1-мъ и 4-мъ предметами и т. д. Изобразимъ эти углы чрезъ h, h', h'',...(здѣсь очевидно $h=i$, $h'=i+i'$,...). Въ случаѣ, совершенной точности наблюденій имѣли бы $h=Z'-Z$, $h'=Z''-Z$, $h''=Z'''-Z$... Подставляя вмѣсто Z, Z', Z''.... ихъ величины, и положивъ для сокращенія $z'-z-h=l$, $z''-z-h'=l'$, $z'''-z-h''=l''$ и проч. получимъ слѣдующія условныя уравненія:

$$l+(\alpha'-\alpha)dx+(\beta'-\beta)dy=0,$$
$$l'+(\alpha''-\alpha)dx+(\beta''-\beta)dy=0,$$
$$l''+(\alpha'''-\alpha)dx+(\beta'''-\beta)dy=0, \text{ и проч.}$$

Послѣ чего останется опредѣлить отсюда искомыя поправки dx и dy по способу наименьшихъ квадратовъ.

III. ВЫЧИСЛЕНІЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СѢТИ.

§ 550. Вычисленіе тригонометрической сѣти на основаніи способа наименьшихъ квадратовъ, состоитъ въ опредѣленіи такихъ поправокъ угловъ, чтобы во 1-хъ) удовлетворялись всѣ условныя уравненія, доставляемыя геометрическими отношеніями между разными частями сѣти и во 2-хъ) чтобы сумма квадратовъ остающихся за тѣмъ погрѣшностей была наименьшая.

Начала служащія основаніемъ составленію условныхъ уравненій, суть слѣдующія:

1-е Сумма трехъ угловъ каждаго треугольника, должна быть равна двумъ прямымъ, сложеннымъ съ сферическимъ избыткомъ.

2-е) Если нѣкоторые изъ треугольниковъ образуютъ многоугольникъ, или если треугольники такъ расположены, что первый изъ нихъ имѣетъ сторону a общую со вторымъ, второй сторону b общую съ третьимъ, третій сторону c общую съ четвертымъ, и т. д. до какого либо треугольника, имѣющаго сторону l общую съ первымъ, то получиття тожественное уравненіе

$$1=\frac{a.b.c....l}{l.a.b....k};$$

но какъ вмѣсто каждаго изъ отношеній $\frac{a}{l}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}.....\frac{l}{k}$, можно подставить отношеніе синусовъ противуположныхъ имъ угловъ, то произойдетъ новое условное уравненіе, (называемое Бесселемъ *уравненіемъ сторонъ*), которое также должно удовлетворяться исправленными этими углами.

3-е) Если съ нѣкотораго пункта измѣренные углы обнимаютъ всю окружность горизонта, и каждый изъ этихъ угловъ измѣренъ независимо отъ другаго, то сумма измѣренныхъ угловъ должна быть $=360°$.

4-е) Если уголъ состоитъ изъ двухъ или нѣсколькихъ частей, и если каждая отдѣльная часть, такъ и полный уголъ опредѣлены помощію особенныхъ и независимыхъ между собою наблюденій, то получится условное уравненіе, когда полный уголъ приравняютъ суммѣ его частей.

На при. если AB (чер. 258) есть измѣренный базисъ (*), а ABC, CAD, BCE, CDE, CEF, DEF послѣдовательные треугольники сѣти, изъ которыхъ въ каждомъ измѣрены были всѣ три угла, то произойдутъ слѣдующія уравненія:

Въ треуг. ABC....$BAC+BCA+ABC-\varepsilon_1=180°$....(I).
» » ACD....$CAD+ACD+ADC-\varepsilon_2=180°$...(II).
» » BCE....$BCE+CBE+CEB-\varepsilon_3=180°$..(III).
» » CDE....$CDE+DCE+CED-\varepsilon_4=180°$..(IV).

Но какъ въ сихъ 4-хъ треугольникахъ, стороны AC есть общая въ 1-мъ и 2-мъ, сторона BC общая во 2-мъ и 3-мъ, сторона CE общая въ 3-мъ и 4-мъ, и наконецъ сторона CD общая въ 4-мъ и 1-мъ, то получимъ уравненіе

$$1=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{CE}\cdot\frac{CE}{CD}\cdot\frac{CD}{AC}$$

или $$1=\frac{\sin ABC.\sin BEC.\sin CDE.\sin CAD}{\sin BAC.\sin CBE.\sin CED.\sin ADC}\ldots(V).$$

Само собою разумѣется, что наблюденная величина каждаго изъ угловъ входящихъ въ это уравненіе должна быть уменьшена третью сферич. избытка, соотвѣтствующаго треуг-ка.

Въ треуг. CEF....$ECF+CEF+CFE-\varepsilon_5=180°$ ..(VI).
» » DEF....$EDF+DEF+DFE-\varepsilon_6=180°$..(VII).

Сверхъ того въ треуг-хъ CED, CEF и DEF, бокъ CE есть общій въ 1-мъ и 2-мъ; бокъ EF во 2-мъ и въ 3-мъ и наконецъ бокъ DE въ 3-мъ и въ 1-мъ; посему

$$1=\frac{CE}{EF}\cdot\frac{EF}{DE}\cdot\frac{DE}{CE}$$

или $$1=\frac{\sin CFE.\sin EDF.\sin DCE}{\sin ECF.\sin DFE.\sin CDE}\ldots(VIII).$$

(*) Предлагаемый здѣсь примѣръ заимствованъ изъ статьи помѣщенной въ Memoirs of the royal astronomical Society, 1846, подъ заглавіемъ: On the Application of the Methode of Least Squares to the Determination of the most probable Errors of Observation in a Portion of the Ordnance Survey of England.

Предлагаемъ здѣсь численныя величины угловъ, данныя наблюденіями:

точки стоянія.	углы.	№	наблюденныя величины.	число наблю-деній.	вѣсы.
A	BAC	1	74°14′35″,375	2	2
	CAD	2	71.46.23,250	2	2
B	ABC	3	61.26.34,500	2	2
	CBE	4	130. 3. 3,250	2	2
C	ACB	5	44.18.52,225	3	3
	BCE	6	25.17.40,750	2	2
	DCE	7	63.56.47,000	3	3
	ECF	8	30.28.17,000	2	2
		7—6	38.39. 6,125	2	2
D	ADC	9	25.15.42,333	3	3
	CDE	10	53.22.39,750	2	2
	EDF	11	62.57.22,000	2	2
E	BEC	12	24.39.16,917	3	3
	CED	13	62.40.35,083	3	3
	DEF	14	62.18.50,250	3	3
F	CFE	15	24.32.17,750	..	0,7
	DFE	16	54.43.49,750	..	0,5

Число наблюденій при двухъ послѣднихъ углахъ не выставлено потому, что на точкѣ F вмѣсто угловъ CFE и DFE измѣрены были углы CFX, EFX, DFX и EFX, и наблюденія дали:

CFX=12°41′ 16″,500 (2 наблюд.)
EFX=11. 51. 1,250 (1 наблюд.)

откуда CFE=24. 32. 17,750, вѣсъ $=\frac{2\times1}{2+1}=0,7$ (*)

(*) Въ § 537, доказано было нами, что если $x=a$ найдено было изъ наблюденій съ вѣроят. погрѣшностію r, а $x'=a'$ съ вѣроят. по-

$$DFX = 42°52'48'',500 \text{ (1 наблюд.)}$$
$$EFX = 11.\ 51.\ \ 1,250 \text{ (1 наблюд.)}$$

откуда $DFE = 54.\ 43.\ 49,750$, вѣсъ $= \frac{1 \times 1}{1+1} = 0,5$

Сверхъ того, должно замѣтить, что кромѣ 16 угловъ, измѣренъ еще уг. BCD, составляющій разность угловъ 7 и 6, не принимается здѣсь въ расчетъ. Подобнаго рода углы составленные изъ суммы или разности другихъ независимо другъ отъ друга наблюденныхъ угловъ, не могутъ быть введены въ условныя уравненія, потому что не представляютъ никакого новаго отношенія между частями фигуры, но приравнивая въ разсматриваемомъ нами случаѣ полный уголъ разности наблюденныхъ его частей, составится прибавочное уравненіе, которое не можетъ быть присовокуплено къ вышенайденнымъ 8 уравненіямъ и ввведено вмѣстѣ съ ними для опредѣленія погрѣшностей. Такое уравненіе отличается отъ другихъ своимъ происхожденіемъ, состоящемъ въ способѣ наблюденій, а не въ геометрическихъ отношеніяхъ фигуры; въ слѣдствіе чего и прилично, для большей ясности методы разсматривать его отдѣльно.

Измѣненіе, которое надобно произвести въ двухъ прилежащихъ углахъ A и B, въ слѣдствіе того, что измѣренъ былъ уголъ A+B или A—B, опредѣляется слѣдующимъ образомъ: пусть m, m' и m'' будутъ три угла выведенные изъ наблюденій, а A, B и A+B ихъ величины истинныя или наивѣроятнѣйшія (въ томъ отношеніи, что эти величины выведены единственно изъ этихъ угловъ и не принимая пока во вниманія условій, соединяющихъ ихъ съ другими углами, наблюденными на другихъ точкахъ стоянія). Означимъ чрезъ p, p' и p'' соотвѣтствующія вѣсы опредѣленій величинъ m, m' и m''.

грѣш. r', то вѣроят. погрѣш. R суммы или разности $a \pm a'$ будетъ $R = \sqrt{r^2 + r'^2}$ или $R^2 = r^2 + r'^2$; но вѣсы опредѣленій обратно пропорціональны съ квадратами вѣроят. погрѣшностей, посему подставя $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$ вмѣсто R^2, r^2 и r'^2, получимъ $P = \frac{r \times r'}{r + r'}$.

Такъ какъ погрѣшности наблюденій будутъ $m-A$, $m'-B$ и $m''-(A+B)$, то взявъ уравненіе

$$2\varphi=(m-A)^2.p+(m'-B)^2\,p'+\left\{m''-(A+B)\right\}^2.p'',$$

вѣроятнѣйшія величины A и B будутъ такія, которыя обращаютъ функцію φ въ *minimum*.

Дифференцируя это уравненіе сперва въ отношеніи къ A, а потомъ къ B, и положивъ $\frac{d\varphi}{dA}=\xi$, $\frac{d\varphi}{dB}=\eta$, получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\xi=0=-mp-m''p''+A(p+p')+Bp''\\ \eta=0=-m'p'-m''p''+Ap''+B(p'+p'')\end{array}\right\}\ldots\ldots(k)$$

Если же измѣрена была не сумма, но разность A—B угловъ, то вмѣсто сихъ уравненій найдемъ слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{l}\xi=0=-mp-m''p''+A(p+p'')-Bp''\\ \eta=0=-m'p'+m''p''-Ap''+B(p'+p'')\end{array}\right\}\ldots\ldots(l)$$

По незначительности величины погрѣшностей наблюденныхъ угловъ, не превосходящей нѣсколькихъ секундъ, можемъ въ сихъ уравненіяхъ подъ m, m' и m'', а также подъ A и B разумѣть лишь однѣ секунды, отбрасывая въ нихъ градусы и минуты и даже десятки секундъ.

Исправимъ теперь съ помощію сихъ формулъ углы 6 и 7, разность коихъ была также измѣрена. Имѣемъ

7,	DCE=63° 56′ 47″,000,	$p=3$
6,	BCE=25. 17. 40, 750,	$p'=2$
DCE—BCE	=38. 39. 6, 125,	$p''=2$

Отбросивъ 63°56′46″ въ первомъ, 25°17′40″ во второмъ, и 38°39′6″ въ третьемъ, остатки выразятъ

$$m=1'',000,\quad m'=0'',750,\quad m''=0'',125.$$

Подставляя сіи величины вмѣсто m, m', m'' и p, p', p'' въ уравненія (l), получимъ

$$0=-3'',00-0'',25+5A-2B,$$
$$0=-1'',50+0'',25-2A+4B;$$

по исключеніи найдемъ

$$A=0'',969,\quad B=0'',797$$

а слѣд. DCE=63°56′46″,969, BCE=25°17′40″,797.

Не должно забывать, что найденные нами углы A и B суть вѣроятнѣйшія ихъ величины, обращающія ξ и η въ нули, или собственно говоря такія, которыя какъ будто получились непосредственно изъ наблюденій. Но если въ уравненія (k) вмѣсто A и B подставимъ A$+\alpha$ и B$+\beta$, гдѣ α и β представляютъ неопредѣленныя поправки измѣренныхъ угловъ, то ξ и η обратятся въ нѣкоторыя величины, которыя означимъ чрезъ ξ' и η', и будетъ

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=+\alpha(p+p'')+\beta p''\\ \eta'&=-\alpha p''+\beta(p'+p'')\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(k').$$

Такимъ же образомъ уравненія (l) даютъ

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=+\alpha(p+p'')-\beta p''\\ \eta'&=+\alpha p''+\beta(p'+p'')\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(l')$$

Если примѣнимъ сіи послѣднія двѣ формулы къ обоимъ угламъ 7 и 6, т. е. къ DCE и BCE и условимся означать чрезъ [7] и [6] соотвѣтствующія величины ξ' и η', а чрезъ (7) и (6) неопредѣленныя погрѣшности α и β, то обѣ послѣднія формулы обратятся въ

$$[7]=+5(7)-2(6);\ [6]=-2(7)+4(6)$$

Предположимъ теперь, что φ есть функція всѣхъ измѣренныхъ угловъ; m, m', m''.... величины ихъ найденныя изъ наблюденій; A, B, C,... вѣроятнѣйшія величины ихъ доставляемыя условными уравненіями и наконецъ p, p', p''.... вѣсы. На основаніи общей теоріи способа наименьшихъ квадратовъ, въ выраженіи

$$2\varphi=(m-\mathrm{A})^2p+(m'-\mathrm{B})^2p'+(m''-\mathrm{C})^2p''+\ldots.$$

функція φ должна быть *minimum*. Означимъ чрезъ (1), (2), (3).... (16) малыя неопредѣленныя поправки, которыя слѣдуетъ ввести въ данные углы, и наконецъ чрезъ [1], [2], [3]....[16] соотвѣтствующіе дифференціальные коефиціенты, получаемые по внесеніи A+(1), B+(2), C+(3) и проч. вмѣсто A, B, C..... Тогда величины угловъ, которые должны быть внесены въ условныя уравненія и величины выраженій [1], [2], [3]....[16] будутъ слѣдующія:

1	74°14′35″,375+(1)	[1]=2(1)
2	71. 46. 23, 250+(2)	[2]=2(2)
3	61. 26. 34, 500+(3)	[3]=2(3)
4	130. 3. 3, 250+(4)	[4]=2(4)
5	44. 18. 52, 225+(5)	[5]=3(5)
6	25. 17. 40, 797+(6)	[6]=4(6)—2(7)
7	63. 56. 46, 969+(7)	[7]=—2(6)+5(7)
8	30. 28. 17, 000+(8)	[8]=2(8)
9	25. 15. 42, 333+(9)	[9]=3(9)
10	53. 22. 39, 750+(10)	[10]=2(10)
11	62. 57. 22, 000+(11)	[11]=2(11)
12	24. 39 16, 917+(12)	[12]=3(12)
13	62. 40. 35, 083+(13)	[13]=3(13)
14	62. 18. 50, 250+(14)	[14]=3(14)
15	24. 32. 17, 750+(15)	[15]=0,7(15)
16	54. 43. 49, 750+(16)	[16]=0,5(16)

Введемъ теперь величину этихъ угловъ въ условныя уравненія, предложенныя на стр. 285, и замѣтимъ предварительно, что вычисленіе по теоремѣ Лежандра сферическаго избытка, даетъ

для треуг-ка ABC.... $\varepsilon_1=0'',214$
» » ACD.... $\varepsilon_2=0,617$
» » BCE.... $\varepsilon_3=0,263$
» » CDE.... $\varepsilon_4=1,123$
» » CEF.... $\varepsilon_5=1,129$
» » DEF.... $\varepsilon_6=1,366$

Послѣ чего для 1-го треуг-ка ABC получимъ

$$
\begin{array}{r}
BAC=74°14'35'',375+(1)\\
ABC=61.\ 26.\ 34,500+(3)\\
ACB=44.\ 18.\ 52,225+(5)\\
\hline
180.\ 0.\ 2,100\\
180°+\varepsilon_1=180.\ 0.\ 0,214\\
\hline
0=+1'',886+(1)+(3)+(5).
\end{array}
$$

Такимъ же образомъ для 2-го треуг-ка ACD, найдемъ

$$0=+3,363+(2)+(5)-(6)+(7)+(9)$$

Здѣсь вмѣсто 3хъ поправокъ входятъ пять, потому что уг. ACD не былъ измѣренъ непосредственно, но выведенъ изъ угловъ 5, 6 и 7 (см. стр. 286).

Касательно составленія численнаго уравненія V, должно замѣтить, что если вмѣсто угловъ ABC, BEC..., подставимъ предложенныя ихъ величины, уменьшенныя третью сфер. избытка соотвѣтствующаго треуг-ка, т. е.

$$ABC = 61°26'34'',500 - 0'',071 + (3)$$
$$BEC = 24.39.16,917 - 0,088 + (12) \text{ и проч.,}$$

то каждый изъ синусовъ, входящихъ въ урав. V приметъ видъ $\sin(A+\alpha)$, гдѣ α есть величина весьма малая. Развернувъ сей синусъ, получимъ $\sin(A+\alpha) = \sin A + \alpha \sin 1'' \cos A$ или $= \sin A(1 + \alpha \sin 1'' \cot A)$, чего логариѳмъ будетъ $\log \sin A + \alpha M \sin 1'' \cot A$, означая чрезъ M модуль. Такъ на прим. введя въ сію формулу величину угла ABC получимъ 9.94366322 +0,0000011459(3).

Руководствуясь изложеннымъ нами теперь дѣйствіемъ, условныя уравненія предложенныя на стр. 285, обратятся въ слѣдующія:

I. $0 = +1'',886 + (1) + (3) + (5)$
II. $0 = +3,363 + (2) + (5) - (6) + (7) + (9)$
III. $0 = +0,701 + (4) + (6) + (12)$
IV. $0 = +0,679 + (7) + (10) + (13)$
VI. $0 = -1,046 + (8) + (13) + (14) + (15)$
VII. $0 = +0,634 + (11) + (14) + (16)$.
V.(*) $0 = -70,0 - 5,941(1) + 6,934(2) + 11,459(3) + 17,699(4)$
$\quad - 44,620(9) + 15,650(10) + 45,872(12) - 10,878(13)$
VIII. $0 = +170,9 + 10,294(7) - 35,785(8) - 15,650(10)$
$\quad + 10,749(11) + 46,120(15) - 14,891(16)$,

Остается объяснить, какимъ образомъ можно опредѣлить изъ сихъ 8 условныхъ уравненій 16 искомыхъ поправокъ (1), (2), (3)....(16). Это дѣйствіе основывается на слѣдующей теоріи:

Пусть φ будетъ функція перемѣнныхъ $x, y, z, t...$, число коихъ есть m, и положимъ, что между ними существуютъ

(*) Всѣ коефиціенты въ уравненіяхъ V и VIII умножены на 10000000

n условныхъ уравненій: $u=0, v=0, w=0, \ldots$ Означимъ чрезъ x', y', z', t' малыя измѣненія этихъ перемѣнныхъ величинъ; тогда измѣненіе $\Delta\varphi$ величины φ будетъ

$$\Delta\varphi=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)x'+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)y'+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)z'+\ldots\ldots(a)$$

Уравненія $u=0$, $v=0$, $w=0$ и проч. даютъ

$$\left.\begin{aligned}0&=\left(\frac{du}{dx}\right)x'+\left(\frac{du}{dy}\right)y'+\left(\frac{du}{dz}\right)z'+\ldots\\0&=\left(\frac{dv}{dx}\right)x'+\left(\frac{dv}{dy}\right)y'+\left(\frac{dv}{dz}\right)z'+\ldots\\0&=\left(\frac{dw}{dx}\right)x'+\left(\frac{dw}{dy}\right)y'+\left(\frac{dw}{dz}\right)z'+\ldots\\&\text{и проч.}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(b)$$

Посредствомъ этихъ уравненій, число коихъ есть n, можно изъ урав. (a) исключить n величинъ $x', y', z'\ldots$, и если φ должно быть *minimum*, то будетъ $\Delta\varphi=0$. И такъ, послѣ упомянутаго исключенія, каждый изъ коефиціентовъ предъ остающимися $m-n$ величинами, долженъ быть приравненъ нулю, и чрезъ то образуются $m-n$ уравненій, которыя совокупно съ n уравненіями $u=0$, $v=0$, $w=0$, достаточны для опредѣленія всѣхъ перемѣнныхъ или искомыхъ поправокъ угловъ.

Исключеніе же n величинъ $x', y', z'\ldots$ изъ выраженія $\Delta\varphi$ можно исполнить слѣдующимъ образомъ: умножимъ каждое изъ уравненій (b) на неопредѣленнаго множителя, и означивъ такіе множители, (число коихъ очевидно будетъ n) чрезъ $f, g, h, \ldots$ придадимъ вышесказанныя произведенія къ уравненію (a), и послѣ того приравняемъ нулю коефиціенты, на которые множатся n изъ величинъ $x', y', z\ldots$, ибо $\Delta\varphi=0$. Получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dx}+f.\frac{du}{dx}+g.\frac{dv}{dx}+h.\frac{dw}{dx}+\text{и проч.}=0\\&\frac{d\varphi}{dy}+f.\frac{du}{dy}+g.\frac{dv}{dy}+h.\frac{dw}{dy}+\text{и проч.}=0\\&\frac{d\varphi}{dz}+f.\frac{du}{dz}+g.\frac{dv}{dz}+h.\frac{dw}{dz}+\text{и проч.}=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(c)$$

Число этихъ уравненій есть m. Они заключаютъ въ себѣ $m+n$ неизвѣстныхъ, а именно: m перемѣнныхъ $x, y, z\ldots$ и n множителей $f, g, h, \ldots$ Но если выведемъ эти перемѣнныя въ функціи упомянутыхъ множителей и потомъ подставимъ ихъ въ уравненія $u=0$, $v=0$, $w=0\ldots$, то сіи послѣднія будутъ заключать въ себѣ лишь неопредѣленные множители $f, g, h\ldots$ и какъ число ихъ равно числу уравненій, то получится возможность вывесть ихъ величину, а потомъ подставить ихъ въ уравненія, выражающія величину перемѣнныхъ $x, y, z\ldots$, чрезъ что рѣшеніе вопроса будетъ достигнуто.

Примѣняя эту теорію къ вышепредложенному примѣру, легко видѣть, что подъ перемѣнными $x, y, z\ldots$ должно разумѣть искомыя поправки, кои мы означали чрезъ (1), (2), (3)....(16). Пусть $m, m', m''\ldots$ будутъ величины угловъ, найденныя изъ наблюденій а А, В, С,... истинныя, или собственно говоря, вѣроятнѣйшія величины оныхъ. Разности $m-A$, $m'-B$, $m''-C\ldots$ очевидно выразятъ погрѣшности наблюденій; на основаніи же общей теоріи наименьшихъ квадратовъ, необходимо, чтобы сумма квадратовъ оныхъ, умноженныхъ на соотвѣтствующіе вѣсы, или

$$2\varphi=(m-A)^2p+(m'-B)^2p'+(m''-C)p''+\ldots\ldots$$

была minimum. Положимъ какъ и прежде $\xi=\frac{d\varphi}{dA}$, $\eta=\frac{d\varphi}{dB}$, $\zeta=\frac{d\varphi}{dC}$ и проч. и примемъ, что ξ', η', ζ' и проч. суть тѣ величины, въ которыя обращаются $\xi, \eta, \zeta\ldots$ когда вмѣсто А, В, С.... подставимъ $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma\ldots$, гдѣ $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ суть неопредѣленныя поправки (1), (2), (3).... или что все равно $x, y, z\ldots$ Но какъ $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0\ldots$, то величины $\xi', \eta', \zeta'\ldots$ будутъ тожественны выраженіямъ $\frac{d\varphi}{d\alpha}, \frac{d\varphi}{d\beta}, \frac{d\varphi}{d\gamma}\ldots$, откуда заключаемъ, что въ урав. (*c*) коефиціенты $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}\ldots$ суть тѣ количества, которыя прежде означали чрезъ [1], [2], [3]....[16]. При семъ должно замѣтить, что поправки присоединяемы были въ этой теоріи къ истиннымъ угламъ, меж-

ду тѣмъ при составленіи условныхъ уравненій онѣ приложены были къ наблюденной величинѣ угловъ, и потому знаки предъ ними должны быть перемѣнены.

Далѣе видимъ, что уравненія $u=0$, $v=0$, $w=0\ldots$ выражаютъ соотвѣтственно 8 уравненій, предложенныя на стр. 291, а перемѣнныя количества въ первыхъ $x, y, z\ldots$ какъ замѣчено выше, поправки (1), (2), (3)....(16). И такъ, принимая $u=0$ за 1-е изъ этихъ уравненій, $v=0$ за 2-е, $w=0$ за 3-е, и т. д. предположимъ, что составлены соотвѣтствующіе имъ дифференціальные коефиціенты: условимся соотвѣтствующіе неопредѣленные множители $f, g, h\ldots$ означать чрезъ I, II, III....VIII (т. е. разумѣя что урав. (I) умножено на множителя I, урав. (II) на множителя II и проч. Такимъ образомъ, въ разсужденіи x или (1), получимъ

$$f\left(\frac{du}{dx}\right)+g\left(\frac{dv}{dx}\right)+h\left(\frac{dw}{dx}\right)\ldots=\mathrm{I}-5{,}941.\mathrm{V},$$

ибо дифференцированіе урав. (I) (или $u=0$), въ разсужденіи x или (1), даетъ 1, и будетъ $\frac{du}{dx}=1$, а дифференцированіе урав. (V) въ разсужденіи (1) будетъ — 5,941. Сверхъ того такъ какъ $\frac{d\varphi}{dx}=-[1]$, то 1-е изъ уравненій (c) обратится въ

$$0=-[1]+\mathrm{I}-5{,}941.\mathrm{V}$$

или подставя 2(1) вмѣсто [1] (см. стр. 290) получимъ

$$2(1)=\mathrm{I}-5{,}941.\mathrm{V}.$$

Такимъ же образомъ въ разсужденіи поправки y или (2) видимъ, что она входитъ въ уравненія (II) и (V) (см. стр. 291), дифференцированіе коихъ въ отношеніи поправки (2), даетъ въ первомъ 1, въ послѣднемъ + 6,934. Въ слѣдствіе чего, умножаемъ 1 на II, а + 6,934 на V, и какъ $\frac{d\varphi}{dy}$ въ семъ случаѣ будетъ $=-[2]$, то 2-е изъ уравненій (c) выразится чрезъ

$$0=-[2]+\mathrm{II}+6{,}934.\mathrm{V}$$

или

$$2(2)=\mathrm{II}+6{,}934.\mathrm{V}.$$

Поступая подобнымъ образомъ для прочихъ получимъ слѣдующія уравненія:

$$2(1)=I-5{,}941\,.\,V$$
$$2(2)=II+6{,}934\,.\,V$$
$$2(3)=I+11{,}459\,.\,V$$
$$2(4)=III+17{,}699\,.\,V$$
$$3(5)=I+II$$
$$4(6)-2(7)=-II+III$$
$$-2(6)+5(7)=II+IV+10{,}294\,VIII$$
$$2(8)=VI-35{,}785\,.\,VIII$$
$$3(9)=II-44{,}620\,V$$
$$2(10)=IV+15{,}650\,V-15{,}650\,VIII$$
$$2(11)=VII+10{,}749\,.\,VIII$$
$$3(12)=III+45{,}872\,.\,V$$
$$3(13)=IV-10{,}878\,.\,V+VI$$
$$3(14)=VI+VII$$
$$0{,}75(15)=VI+46{,}120\,.\,VIII$$
$$0{,}5(16)=VII-14{,}891\,.\,VIII.$$

Выводя отсюда выраженія поправокъ (1), (2)....(16) въ функціи множителей, получимъ:

$$(1)=0{,}5000\,.\,I-2{,}9705\,.\,V$$
$$(2)=0{,}5000\,.\,II+3{,}4670\,.\,V$$
$$(3)=0{,}5000\,.\,I+5{,}7295\,.\,V$$
$$(4)=0{,}5000\,.\,III+8{;}8495\,.\,V$$
$$(5)=0{,}3333\,.\,I+0{,}3333\,.\,II$$
$$(6)=-0{,}1875.II+0{,}3125.III+0{,}1250.IV+1{,}28675.VIII$$
$$(7)=+0{,}1250\,II+0{,}1250\,III+0{,}2500\,IV+2{,}5735\,VIII$$
$$(8)=+0{,}5000\,VI-17{,}8925\,VIII$$
$$(9)=+0{,}3333\,II-14{,}8733\,V$$
$$(10)=+0{,}5000\,IV+7{,}8250\,V-7{,}8250\,VIII$$
$$(11)=+0{,}5000\,VII+5{,}3745\,VIII$$
$$(12)=+0{,}3333\,III+15{,}2907\,V$$
$$(13)=+0{,}3333\,IV-3{,}6260\,V+0{,}3333\,VI$$
$$(14)=+0{,}3333\,VI+0{,}3333\,VII$$
$$(15)=+1{,}4286\,VI+65{,}8857\,VIII$$
$$(16)=+2{,}000\,VII-29{,}782\,VIII.$$

Подставимъ теперь сіи величины поправокъ въ условныя уравненія (см. стр. 291) и результаты представимъ въ видѣ слѣдующей таблицы, выставляя въ ней для краткости, неопредѣленные множители I, II, III.... въ заглавіи столбцевъ:

	I	II	III	V.	IV	VIII	VI	VII
0=+1″,886	+1,3333	+ 0,3333	....	+ 2,7590	....	....	....	....
0=+3,363	+0,3333	+ 1,4791	— 0,1875	—11,4066	+2,1250	+1,2868	....	....
0=+0,701	....	— 0,1875	+ 1,1458	+24,1402	+0,1250	+1,2868	....	....
0=+70,000	+2,7590	—11,4066	+24,1402	+1790,936	+4,1990	—122,4610	— 3,6260	....
0=+0,679	....	+ 0,1250	+ 0,1250	+ 4,1990	+1,0833	—5,2515	+ 0,3333	....
0=+170,900	....	+ 1,2868	+ 1,2868	—122,4610	—5,2515	+4329,1410	+47,9930	—24,4075
0=—1,046	....	....	....	— 3,6260	+0,3333	+47,993	+ 2,5952	+ 0,3333
0=+0,634	....	....	....	....	....	—24,4075	+ 0,3333	+ 2,8333

Здѣсь 8 уравненій и 8 неизвѣстныхъ I, II, III.... Рѣшивъ ихъ, руководствуясь общими способами начальной алгебры, найдемъ слѣдующія величины неизвѣстныхъ.

I=—1,122	V=+0,061
II=—1,677	VI=+1,936
III=—2,018	VII=—0,699
IV=—1,043	VIII=—0,066.

Послѣ того подставя сіи величины въ выраженія, предложенныя на стр. 295, получимъ:

(1)=—0″,744	(6)=—0″,502	(11)=—1″,018
(2)=—0,626	(7)=—0,834	(12)=+0,266
(3)=—0.209	(8)=+2,152	(13)=—0,009
(4)=—0,465	(9)=—1,472	(14)=+0,497
(5)=—0,933	(10)=+0,163	(15)=—1,594
		(16)=—0,113

остается величину такимъ образомъ найденныхъ поправокъ ввести въ углы (см. стр. 290) и потомъ уже рѣшить треуг-ки руководствуясь извѣстными геодезическими способами.

Примѣчаніе. Изъ предложеннаго нами здѣсь примѣра, имѣемъ право заключить, что исправленіе угловъ тригонометрической сѣти,на основаніи способа наименьшихъ квадратовъ, можно допускать лишь въ томъ случаѣ, когда сѣть состоитъ изъ весьма небольшаго числа треугольниковъ, подобно какъ въ градусномъ измѣреніи Бесселя, или въ треангуляціяхъ нѣкоторыхъ изъ небольшихъ германскихъ государствъ. Примѣнять же этотъ способъ къ обширнымъ геодезическимъ дѣйствіямъ, производящимся у насъ въ Россіи рѣшительно невозможно, ибо встрѣтится надобность рѣшать нѣсколько сотъ уравненій съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ. По сей причинѣ, мы, русскіе, не можемъ въ геодезическихъ дѣйствіяхъ, слѣдовать безусловно по пути, указанному новѣйшими германскими учеными, но должны при вычисленіи треангуляціи, прибѣгать къ методамъ болѣе простѣйшимъ.

КОНЕЦЪ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗІИ.

ИЗЪЯСНЕНІЕ ТАБЛИЦЪ.

При вычисленіи всѣхъ нижепредложенныхъ таблицъ для длины радіуса A экватора и величины сжатости μ земнаго сфероида приняты результаты, выведенные Бесселемъ (см. ч. I, стр. 329), а именно: $\log A = 6.4755385$ (въ саженяхъ), $\mu = \frac{1}{299,15}$, и $\log e = \bar{2}.9122052$, (гдѣ e есть эксцентриситетъ).

Таблица I представляетъ логариѳмы нормалей N и радіусовъ кривизны ϱ меридіана для каждаго градуса широты. Она вычислена по формуламъ (17) § 173. Какъ тѣ, такъ и другіе для широтъ промежуточныхъ, найдутся посредствомъ простаго интерполированія; такъ наприм. для опредѣленія логариѳма нормали подъ широтою $56^\circ 28' 30''$, берется изъ таблицы разность $6.4765603 - 6.4765369 = 0,0000234$, (т. е. между числами, соотвѣтствующими 57° и 56°), и раздѣливъ ее на 60, частное умножаютъ на данное число минутъ, т. е. на $28\frac{1}{2}$; результатъ $x = 0,0000111$ прикладывается къ 6.4765369 и будетъ 6.4765480.

Для перечисленія этой таблицы въ тоазахъ достаточно ко всѣмъ ея числамъ прикладывать постоянное число 0.0392850, а въ метрахъ число 0.3291049.

При семъ должно замѣтить, что съ помощію этой таблицы можно весьма легко опредѣлять число α секундъ всякой геодезической линіи, которой длина k и азимутъ ω извѣстны, ибо достаточно въ формулу

$$\alpha = \frac{k \cos^2 \omega}{\varrho \sin 1''} + \frac{k \sin^2 \omega}{N \sin 1''}$$

вмѣсто ϱ и N вводить величины, взятыя изъ таблицы, соотвѣтствующія широтѣ средины этой дуги (*).

Въ таблицѣ II предложена въ саженяхъ длина градусовъ меридіана, а въ таблицѣ III параллелей. Первая изъ нихъ

(*) Считаемъ не безполезнымъ предложить здѣсь выводъ сей формулы: Уравненіе, выражающее радіусъ кривизны R линіи, лежащей подъ

вычислена по формулѣ предложенной въ I части на стр. 331, а вторая по уравненію § 177. Хотя градусы меридіана возрастаютъ послѣдовательно отъ юга къ сѣверу, однако въ вопросахъ, относящихся къ построенію картъ, безъ чувствительной погрѣшности можно принимать одну минуту меридіана равною 60-й доли градуса, а секунду 60-й доли минуты. Впрочемъ, если данная амплитуда дуги заключаетъ въ себѣ минуты и секунды съ десятичными долями, тогда длина ея опредѣлится точнѣе и даже скорѣе посредствомъ формулы $k=\varrho\alpha\sin 1''$, гдѣ α есть искомая амплитуда, выраженная въ секундахъ, а ϱ радіусъ кривизны меридіана при точкѣ, лежащей на срединѣ дуги.

Таблица IV, представляющая логариѳмы логариѳмовъ количества $u=\frac{\tan g(45^\circ+\frac{1}{2}l)}{\tan g^e(45^\circ+\frac{1}{2}\psi)}$, $\sin\psi=e\sin l$, (гдѣ e есть ексцентриситетъ, а l широта), служитъ вспомогательною для вычисленія радіусовъ, которыми описываются дуги земныхъ па-

---

азимутомъ ω, при точкѣ, имѣющей широту l, какъ извѣстно, есть (см. § 168 урав. 10)

$$R=\frac{A(1-e^2)}{(1-e^2+e^2\cos^2 l\ \cos^2\omega)\sqrt{1-e^2\sin^2 l}};$$

умноживъ числитель и знаменатель этого уравненія на $A\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}$, и не забывая что $N=\frac{A}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)}}$ и $\varrho=\frac{A(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}}$, получимъ

$$R=\frac{N\varrho\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}}{A(1-e^2+e^2\cos^2 l\cos^2\omega)}.$$

Но многочленъ $1-e^2+e^2\cos^2 l.\cos^2\omega$, отъ внесенія $\sin^2\omega+\cos^2\omega$ вмѣсто 1, и $1-\sin^2 l$ вмѣсто $\cos^2 l$, обратится въ

$$\cos^2\omega(1-e^2\sin^2 l)+\sin^2\omega-e^2(1-\cos^2\omega)$$

или
$$\cos^2\omega(1-e^2\sin^2 l)+\sin^2\omega(1-e^2).$$

Подставя теперь это выраженіе въ знаменатель, потомъ раздѣливъ его, также какъ и числитель на $\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}$, получимъ

$$R=\frac{N\varrho}{N\cos^2\omega+\varrho\sin^2\omega}$$

Остается эту формулу, предложенную знаменитымъ Ейлеромъ, ввести въ выраженіе $\alpha=\frac{k}{R\sin 1''}$, чрезъ что и найдется вышепредложенная.

раллелей на проэкціи Гаусса, отъ 30′ до 30′ между 40° и 70° широты. Формула, выражающая логариѳмъ такихъ радіусовъ есть (см. § 512, урав. 15)

$$\log\varrho = \log k - \alpha \log u,$$

гдѣ k и α суть постоянныя количества, зависящія отъ частныхъ условій требуемыхъ отъ карты (см. ч. II, стр. 206). Такъ на прим. принимая (см. стр. 208) $\log k = 6.7287281$ и $\log\alpha = \bar{1}.9139237$, вычислимъ съ помощію предложенной таблицы радіусъ (въ саженяхъ) параллели подъ широтою $l = 58°$:

$\log\alpha = \bar{1}.9139237$
$\log\log u = \bar{1}.7324271$ (см. таб. IV), $\log k = 6.7287281$
$\log(\alpha\log u) = \bar{1}.6463508$ . . . . $\alpha\log u = 0{,}4429460$
$\log\varrho = 6.2857821$

Въ заключеніе предлагаемъ здѣсь примѣръ вычисленія координатъ точки, имѣющей широту $l = 58°$ и долготу (отъ средняго меридіана) $t = 10°$ или $36000''$, а также линейнаго масштаба подъ тою же широтою по формуламъ

$$X = \varrho\cos\theta,\ Y = \varrho\sin\theta, \text{ гдѣ } \theta = \alpha t. \text{ (см. § 512, урав. 15)}$$

и $$m = \frac{\alpha\varrho}{r},\ r = N\cos l. \text{ (см. § 514, урав. 17)}$$

$\log\alpha = 9.9139237$
$\log t = 4.5563025$
$\log\theta = 4.4702262$, $\theta = 29527'',5 = 8°12'7'',5$
$\log\varrho = 6.2857821$ 6.2857821
$\log\cos\theta = 9.9955348$ $\log\sin\theta = 9.1543172$
$\log X = 6.2813169$ $\log Y = 5.4400993$
$X = 1911247$ саж. $Y = 275586$ саж.
$\log N = 6.47658$ (см. таб. I) $\log\alpha = 9.91392$
$\log\cos l = 9.72421$ $\log\varrho = 6.28578$
$\log r = 6.20079$ . . . . дополн. $= \bar{7}.79921$
$\log m = \bar{1}.99891$
$m = 0{,}9975$

Значеніе этого числа m объяснено на стр. 205.

ТАБЛИЦА I.

Широта.	logN	logρ	Широта.	logN	logρ	Широта.	logN	logρ
0°	6.4755385	6.4726301	30°	6.4759011	6.4736179	60°	6.4766283	6.4758995
1	5389	6313	31	9233	7845	61	6500	9646
2	5403	6355	32	9458	8520	62	6713	6.4760285
3	5425	6421	33	9689	9213	63	6922	1012
4	5455	6511	34	9922	6.4740012	64	7125	1521
5	5495	6633	35	6.4760158	0620	65	7322	2112
6	5543	6775	36	0398	1340	66	7514	2688
7	5600	6946	37	0640	2066	67	7700	3246
8	5666	7144	38	0886	2904	68	7881	3789
9	5740	7366	39	1133	3539	69	8053	4305
10	6.4755822	6.4727612	40	6.4761381	6.4744289	70	6.4768221	6.4764809
11	5912	7882	41	1632	5042	71	8380	5286
12	6012	8182	42	1884	5789	72	8534	5748
13	6118	8590	43	2136	6554	73	8680	6186
14	6234	8848	44	2389	7313	74	8819	6703
15	6356	9214	45	2644	8078	75	8950	6996
16	6486	9604	46	2897	8837	76	9073	7365
17	6624	6.4730018	47	3151	9599	77	9188	7710
18	6770	0456	48	3404	6.4750358	78	9296	8034
19	6922	0912	49	3655	1111	79	9396	8334
20	6.4757081	6.4731389	50	6.4763906	6.4741844	80	6.4769487	6.4768607
21	7247	1787	51	4156	2614	81	9570	8856
22	7420	2406	52	4403	3355	82	9644	9078
23	7598	2940	53	4648	4090	83	9710	9276
24	7783	3495	54	4892	4822	84	9768	9450
25	7975	4071	55	5132	5542	85	9816	9594
26	8172	4662	56	5369	6253	86	9856	9714
27	8374	5268	57	5603	6955	87	9887	9807
28	8581	5889	58	5833	7645	88	9909	9873
29	8795	6531	59	6061	8329	89	9923	9915
30	9011	6179	60	6283	8995	90	9927	9927

ТАБЛИЦА II.

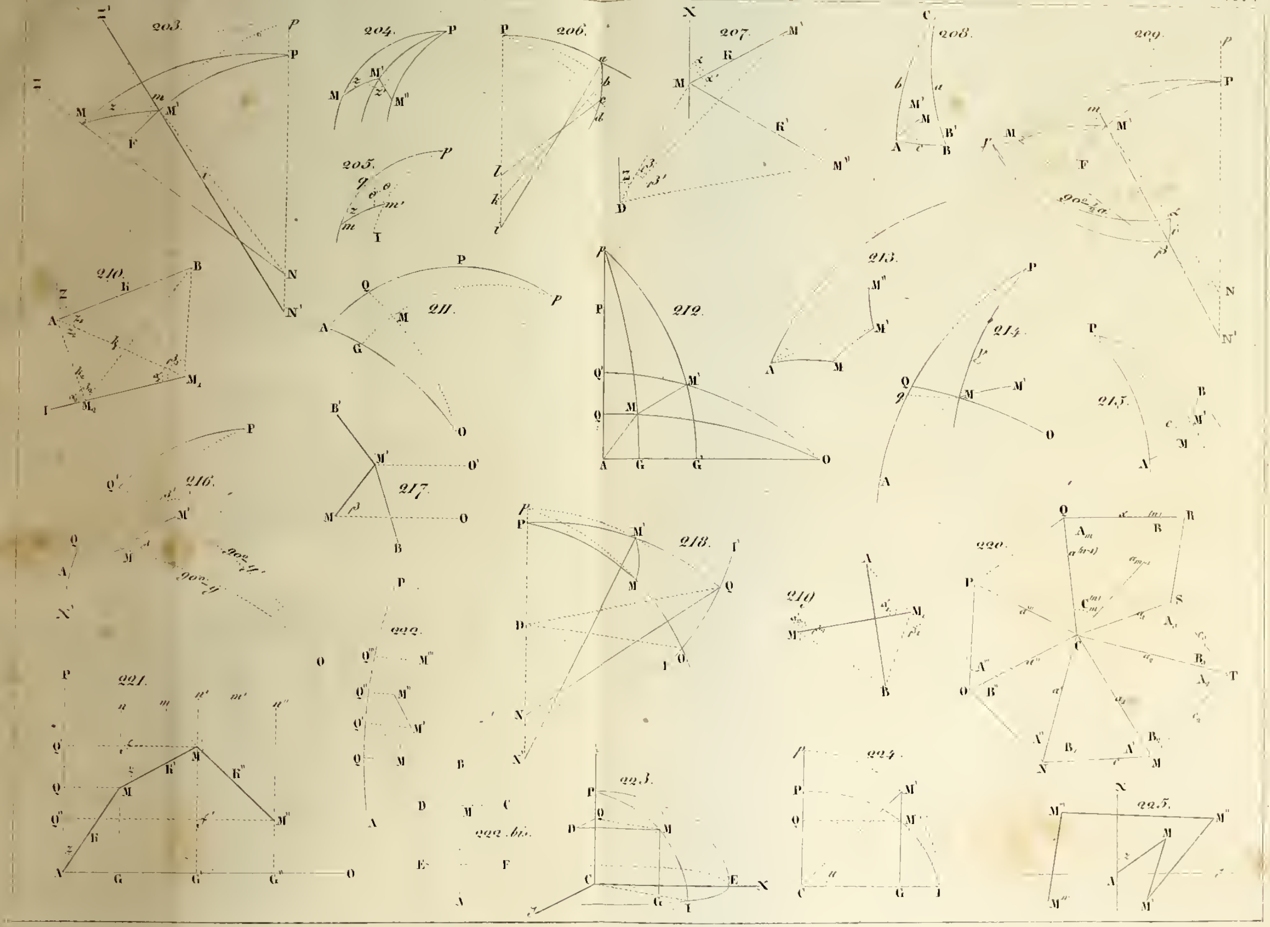
Широта.	Дуги меридіановъ.	Разн.	Широта.	Дуги меридіановъ.	Разн.	Широта.	Дуги меридіановъ.	Разн.
0°	51 821,28 саж.	0,31	30°	51 955,14 саж.	8,03	60°	52 216,71 саж.	7,78
1	821,59	0,63	31	963,17	8,18	61	224,49	7,60
2	822,22	0,95	32	971,35	8,31	62	232,09	7,42
3	823,17	1,26	33	979,66	8,44	63	239,51	7,23
4	824,43	1,57	34	988,10	8,55	64	216,74	7,04
5	826,00	1,88	35	996,65	8,66	65	253,78	6,82
6	827,88	2,19	36	52005,31	8,76	66	260,60	6,61
7	830,07	2,50	37	014,07	8,84	67	267,21	6,38
8	832,57	2,80	38	022,91	8,91	68	273,59	6,15
9	835,37	3,10	39	031,82	8,98	69	279,74	5,91
10	838,47	3,39	40	040,80	9,03	70	285,65	5,66
11	51 841,86	3,68	41	52 049,83	9,07	71	52 291,31	5,40
12	845,54	3,97	42	058,90	9,10	72	296,71	5,14
13	849,52	4,25	43	068,00	9,12	73	301,85	4,87
14	853,77	4,53	44	077,12	9,13	74	306,72	4,60
15	858,30	4,80	45	086,25	9,13	75	311,32	4,32
16	863,10	5,07	46	095,38	9,12	76	315,64	4,04
17	868,17	5,33	47	104,50	9,09	77	319,68	3,74
18	873,50	5,58	48	113,59	9,05	78	323,42	3,44
19	879,09	5,83	49	122,64	9,00	79	326,86	3,15
20	884,92	6,07	50	131,64	8,95	80	330,01	2,84
21	51 890,99	6,30	51	52 140,59	8,88	81	52 332,85	2,54
22	897,29	6,53	52	149,47	8,80	82	335,39	2,23
23	903,82	6,75	53	158,26	8,71	83	337,62	1,91
24	910,57	6,96	54	166,97	8,60	84	339,53	1,60
25	917,52	7,16	55	175,57	8,49	85	341,13	1,29
26	924,68	7,35	56	184,07	8,37	86	342,42	0,96
27	932,03	7,53	57	192,44	8,23	87	343,38	0,64
28	939,56	7,71	58	200,67	8,09	88	344,02	0,32
29	947,27	7,87	59	208,76	7,95	89	344,34	
30	955,14		60	216,71				

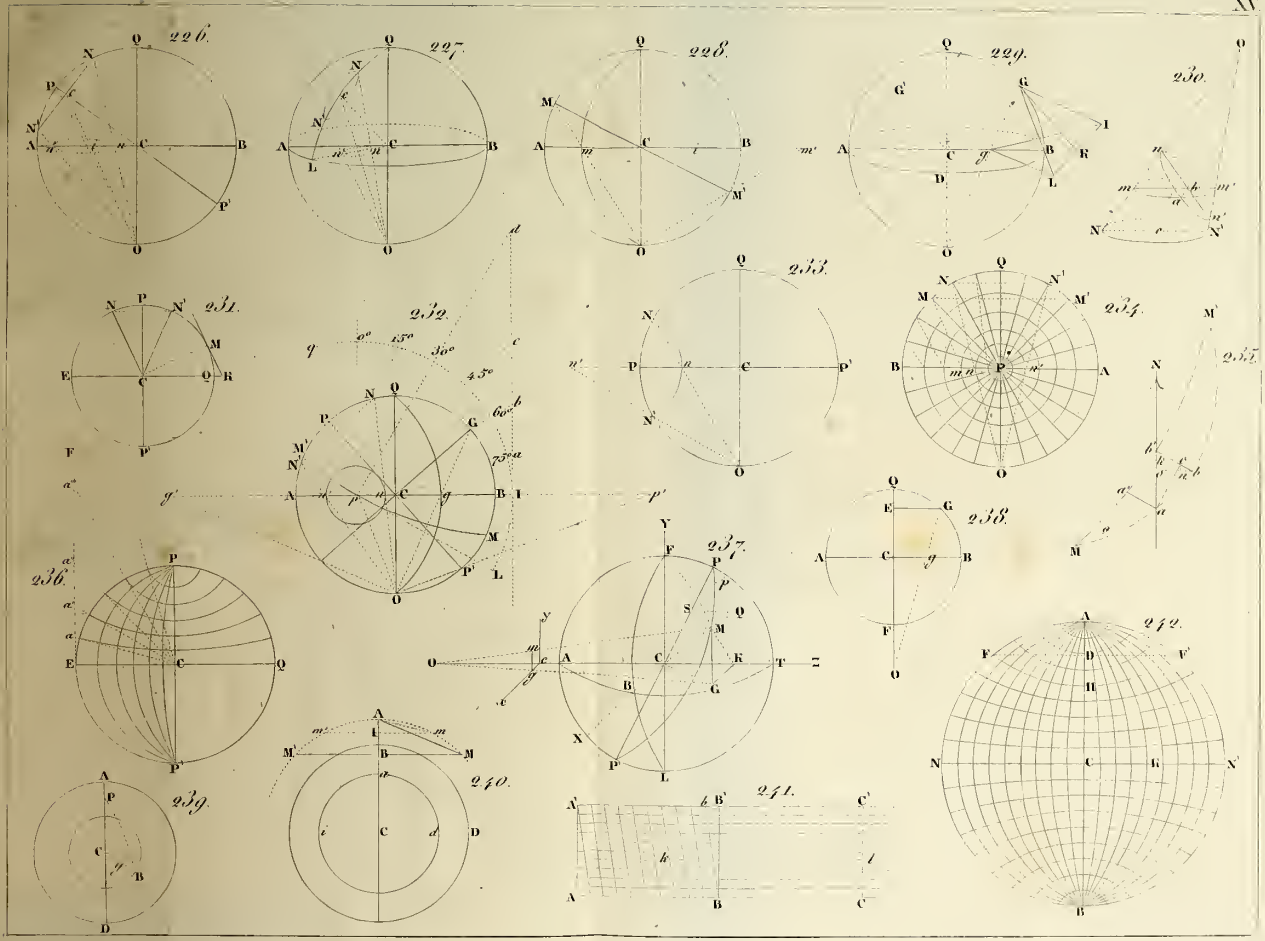
ТАБЛИЦА III.

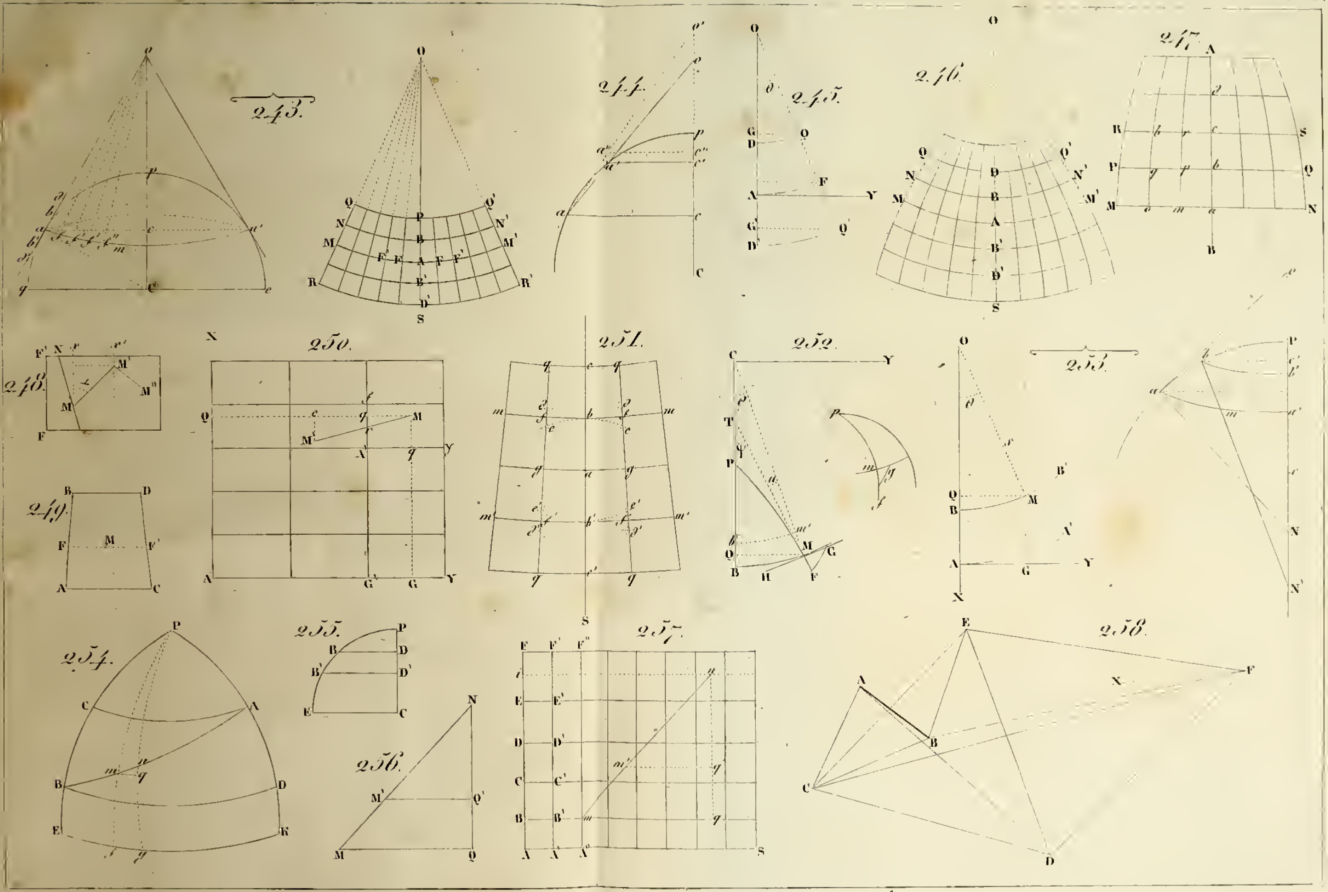
Широта.	Градусы параллелей.	Разн.	Широта.	Градусы параллелей.	Разн.	Широта.	Градусы параллелей.	Разн.
	саж.			саж.			саж.	
0°	52169,3	7,8	30°	45217,8	460,3	60°	26150,2	793,2
1	52161,5	23,7	31	44757,2	473,8	61	25357,0	801,0
2	52137,8	39,4	32	44283,7	487,4	62	24556,0	808,6
3	52098,4	55,2	33	43796,3	500,7	63	23747,4	815,9
4	52043,2	71,0	34	43295,6	513,9	64	22931,5	823,1
5	51972,2	86,7	35	42781,7	527,0	65	22108,4	829,9
6	51885,5	102,4	36	42254,7	539,9	66	21278,5	836,4
7	51783,1	118,1	37	41714,8	552,7	67	20442,1	842,8
8	51665,0	133,7	38	41162,1	565,1	68	19599,3	848,8
9	51531,3	149,3	39	40597,0	577,7	69	18750,5	854,7
10	51382,0	164,9	40	40019,3	589,9	70	17895,8	860,2
11	51217,1	180,3	41	39429,4	601,9	71	17035,6	865,5
12	51036,8	195,9	42	38827,5	613,9	72	16170,1	870,5
13	50840,9	211,3	43	38213,6	625,5	73	15299,6	875,2
14	50629,6	226,6	44	37588,1	637,1	74	14424,4	879,7
15	50403,0	241,8	45	36951,0	648,4	75	13544,7	883,9
16	50161,2	257,1	46	36302,6	659,5	76	12660,8	887,9
17	49904,1	272,2	47	35643,1	670,4	77	11772,9	891,5
18	49631,9	287,3	48	34972,7	681,3	78	10881,4	894,9
19	49344,6	302,2	49	34291,4	691,7	79	9986,5	897,9
20	49042,4	317,2	50	33599,7	702,1	80	9086,6	900,8
21	48725,2	331,9	51	33897,6	712,2	81	8187,8	903,3
22	48393,3	346,6	52	32185,4	722,0	82	7284,5	905,6
23	48046,7	361,2	53	31463,4	731,8	83	6378,9	907,6
24	47685,5	375,8	54	30731,6	741,2	84	5471,3	909,3
25	47309,7	390,0	55	29990,4	750,5	85	4562,0	910,7
26	46919,7	404,4	56	29239,9	759,5	86	3651,3	911,8
27	46515,3	418,5	57	28480,4	768,2	87	2739,5	912,7
28	46096,8	432,6	58	27712,2	776,8	88	1826,8	913,3
29	45664,2	446,4	59	26935,4	785,2	89	913,5	913,5
30	45217,8		60	26150,2		90	0	

ТАБЛИЦА IV.

широты.	log log u.	разность.	широты.	log log u.	разность.
40° 0′	9.5178061	64716	55°	9.6980132	57374
40.30	9.5242777	64244	55.30′	9.7037506	57350
41.0	9.5307021	63791	56.0	9.7094856	57336
41.30	9.5370812	63354	56.30	9.7152192	57338
42.0	9.5434166	62934	57.0	9.7209530	57354
42.30	9.5497100	62533	57.30	9.7266884	57387
43.0	9.5559633	62155	58.0	9.7324271	57432
43.30	9.5621788	61783	58.30	9.7381703	57492
44.0	9.5683571	61432	59.0	9.7439195	57571
44.30	9.5745003	61097	59.30	9.7496766	57660
45.0	9.5806100	60778	60.0	9.7554426	57771
45.30	9.5866878	60472	60.30	9.7612197	57895
46.0	9.5927350	60184	61.0	9.7670092	58037
46.30	9.5987534	59910	61.30	9.7728129	58196
47.0	9.6047444	59648	62.0	9.7786325	58372
47.30	9.6107092	59404	62.30	9.7844697	58571
48.0	9.6166496	59172	63.0	9.7903268	58783
48.30	9.6225668	58956	63.30	9.7962051	59020
49.0	9.6284624	58752	64.0	9.8021071	59275
49.30	9.6343374	58562	64.30	9.8080346	59550
50.0	9.6401938	58388	65.0	9.8139896	59852
50.30	9.6460326	58225	65.30	9.8199748	60174
51.0	9.6518556	58075	66.0	9.8259922	60520
51.30	9.6576626	57940	66.30	9.8320442	60894
52.0	9.6634566	57820	67.0	9.8381336	61283
52.30	9.6692386	57710	67.30	9.8442629	61720
53.0	9.6750096	57619	68.0	9.8504349	62200
53.30	9.6807715	57535	68.30	9.8566549	62642
54.0	9.6865250	57468	69.0	9.8629191	63187
54.30	9.6922718	57414	69.30	9.8692378	63744
55.0	9.6980132		70.0	9.8756122	


203.
204.
205.
206.
207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.
219.
220.
221.
222.
222. bis.
223.
224.
225.


226.
227.
228.
229.
230.
231.
232.
233.
234.
235.
236.
237.
238.
239.
240.
241.
242.


243.
244.
245.
246.
247.
248.
249.
250.
251.
252.
253.
254.
255.
256.
257.
258.

THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA
AT CHAPEL HILL

RARE BOOK COLLECTION

The André Savine Collection

QB301
.B6
1845
ch.2